E désigne un espace vectoriel, le **corps des scalaires est toujours** $\mathbb{R}$, donc jamais $\mathbb{C}$.

1 - Produit scalaire et norme euclidienne.

Un <u>*produit scalaire*</u> $\langle .,. \rangle : \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}, (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\mapsto\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour montrer qu'une application $\varphi : \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ est un produit scalaire, on montre que

1. φ est *linéaire à gauche* :
   $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})\in\mathbb{E}^3, \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(\lambda\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=\lambda\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})+\varphi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$;
2. φ est *symétrique* :
   $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\mathbb{E}^2,\ \varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\varphi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})$;
   1. et 2. prouvent que φ est bilinéaire symétrique.
3. φ est *positive* :
   $\forall u\in\mathbb{E},\ \varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})\geqslant 0$;
4. φ est *définie* :
   $\forall u\in\mathbb{E},\ \left(\varphi(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})=0\Longrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\right)$;
   3. et 4. prouvent que φ est définie positive.

Il convient, pour le point 4., d'être vigilant dans les arguments invoqués. On s'appuie souvent sur les propriétés suivantes :

- ☞ Une somme de termes <u>*TOUS POSITIFS*</u> n'est nulle que si tous les termes sont nuls (qu'il y ait un nombre fini de termes ou non, donc y compris pour une somme de série à termes positifs) ;
- ☞ Si f est <u>*POSITIVE et CONTINUE*</u> sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$, alors f est nulle sur $[\,a\,;\,b\,]$: $\forall t\in[\,a\,;\,b\,], f(t)=0$.
  Remarque : dans ce dernier point, on peut partout remplacer $[\,a\,;\,b\,]$ par $]\,a\,;\,b\,]$, $[\,a\,;\,b\,[$ ou $]\,a\,;\,b\,[$ si l'on a des intégrales impropres.

La <u>*norme euclidienne*</u> associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est l'application $||.||$ définie par : $\forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\ ||\overrightarrow{u}||=\sqrt{\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle}$.

Le vecteur $\overrightarrow{x}$ est <u>*unitaire*</u> si $||\overrightarrow{x}||=1$.

Pour rendre unitaire ou <u>normaliser</u> le vecteur non nul $\overrightarrow{x}$, on le divise par sa norme.

En effet, si $\overrightarrow{y}=\dfrac{1}{||\overrightarrow{x}||}\overrightarrow{x}$, alors $||\overrightarrow{y}||=1$ et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{y})=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x})$.

Les propriétés du produit scalaire permettent d'établir le formulaire suivant :

$\forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\ \left\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{0}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{0},\overrightarrow{u}\right\rangle=0$;	$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\mathrm{E}^2,$
$\forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\ ||\overrightarrow{u}||\geqslant 0$;	$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=||\overrightarrow{u}||^2+2\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle+||\overrightarrow{v}||^2$;
$\forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\ (||\overrightarrow{u}||=0)\Longleftrightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$;	$\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})\in\mathrm{E}^2,$
$\forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\forall\lambda\in\mathbb{R},\ ||\lambda\overrightarrow{u}||=|\lambda|\,||\overrightarrow{u}||$;	$\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle=\dfrac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right)$.

Pour trouver de quel produit scalaire provient une norme,
on utilise la dernière formule du formulaire précédent.

Quelques produits scalaires à connaître.

- ☞ Sur $\mathbb{R}^n$, $\langle(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i$ définit le produit scalaire canonique, de norme associée $||(x_1,\ldots,x_n)||=\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.
  En écrivant les vecteurs sous forme de matrice colonne, on a $\langle x,y\rangle={}^t\mathrm{X.Y}$ et $||x||=\sqrt{{}^t\mathrm{X.X}}$.
- ☞ Sur $\mathcal{C}([\,a\,;\,b\,],\mathbb{R})$, $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit saclaire (à savoir démontrer !!!).

Pour établir des inégalités, on dispose de

- ☞ *L'inégalité de Cauchy-Schwarz :* Pour tous u et v de E, $|\langle u,v\rangle|\leqslant||u||\,||v||$, avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
  Remarque : On utilise souvent cette inégalité en l'élevant au carré (ce qui évite les $|.|$ et $\sqrt{.}$) : $\langle u,v\rangle^2\leqslant||u||^2\,||v||^2$.
- ☞ *L'inégalité triangulaire :* Pour tous u et v de E, $||u+v||\leqslant||u||+||v||$.

2 - Orthogonalité.

Rappelons que x et y sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle=0$ et on écrit alors $x\perp y$.

Pour établir qu'une famille $(u_i)_i$ est orthogonale,
je montre que $\forall i\neq j,\ \langle u_i,u_j\rangle=0$.

Pour établir qu'une famille $(u_i)_i$ est orthonormale,
je montre que $\forall i,j,\ \langle u_i,u_j\rangle=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$.

Pour construire une famille orthonormale partant d'une famille orthogonale,

je divise chaque vecteur de la famille orthogonale par sa propre norme.

Pour construire une famille ortho-gonale ou -normale partant d'une famille libre,

je dispose d'une famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$ et que je veux créer une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ orthogonale, voire orthonormale. Je crée cette famille vecteur après vecteur :

- je pose $e_1 = u_1$;
- je pose $e_2 = \beta u_2 + \alpha e_1$ et je détermine α (en fonction de β) grâce à la condition
$$e_2 \perp e_1 \Leftrightarrow \langle e_2, e_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \beta u_2 + \alpha e_1, e_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\langle u_2, e_1\rangle}{||e_1||^2}\beta$$
- je pose $e_3 = \beta u_3 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et je détermine α_1 et α_2 en résolvant le système
$$\begin{cases} e_3 \perp e_1 \\ e_3 \perp e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_3, e_1\rangle = 0 \\ \langle e_3, e_2\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$
- ...
- je pose $e_p = \beta u_p + \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_{p-1} e_{p-1}$ et je détermine $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ en résolvant le système
$$\begin{cases} e_p \perp e_1 \\ e_p \perp e_2 \\ \vdots \\ e_p \perp e_{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_p, e_1\rangle = 0 \\ \langle e_p, e_2\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle e_p, e_{p-1}\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ obtenue est alors orthogonale.

A la fin, je peux diviser chaque vecteur par sa norme pour la rendre orthonormale.

Pour montrer qu'une famille sans vecteur nul est libre, on peut étudier si elle est orthogonale. Si oui, elle est libre, mais sinon, elle peut quand même être libre ...

3 - Espaces euclidiens.

Tout espace euclidien possède au moins une base orthonormale (b.o.n.).

Pour trouver une base orthonormale de E *ou d'un sous-ev* F*,*

- je choisis d'une base $\mathcal{B}$ de E (ou de F),
- j'étudie si $\mathcal{B}$ est orthogonale,
- si oui, je divise chaque vecteur de $\mathcal{B}$ par sa norme,
- si non, j'orthonormalise $\mathcal{B}$ par le procédé décrit ci-dessus.

Pour calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur dans une b.o.n.,

j'utilise $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ et $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$ pour toute b.o.n. $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans une b.o.n.,

j'utilise $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une b.o.n..

Version matricielle

$\langle x, y\rangle = {}^t\mathrm{XY}$ et $||\mathrm{X}|| = \sqrt{{}^t\mathrm{XX}}$ si $\mathrm{X} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$, et $\mathcal{B}$ b.o.n.

Pour inverser une matrice de passage P *entre deux b.o.n.,*

j'utilise que dans ce cas-là, P est orthogonale et $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$.

Pour montrer qu'une matrice P *est orthogonale,*

je calcule ${}^t\mathrm{P}.\mathrm{P}$ et je trouve I_n.

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est une b.o.n. pour le p.s. canonique,*

(il faut bien sûr que $\mathcal{B}$ possède exactement n vecteurs !)je range les vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ en colonne dans une matrice M, je calcule ${}^t\mathrm{M}.\mathrm{M}$ et je trouve I_n, ce qui prouve que M est orthogonale, et comme M est la matrice de passage de la b.o.n. canonique à la famille $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ est orthonormale.

Pour montrer que deux sous-espaces F *et* G *sont orthogonaux,*

- je montre que tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G.
- $\boxed{\text{OU}}$ je choisis une base de F et une base de G et je montre que tout vecteur de l'une est orthogonal à tout vecteur de l'autre.

Rappelons que si $\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$, alors F et G sont en somme directe.

Pour déterminer l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ *du sous-espace* F*,*

- je choisis une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ (pas nécessairement orthonormale) de F et je traduis l'appartenance à $\mathrm{F}^\perp$ par un système :
$$x \in \mathrm{F}^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1\,;\,p]\!],\ x \perp e_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, e_1\rangle = 0 \\ \quad\vdots \\ \langle x, e_p\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$
- $\boxed{\text{OU}}$ (moins général) si F est défini par une condition (voire plusieurs) du type $\{u \in \mathrm{E}, f(u) = 0\}$, j'étudie si $f(u) = 0$ ne peut pas se traduire par $\langle u, v\rangle = 0$ pour un vecteur v bien choisi. Dans ce cas, $\mathrm{F}^\perp = \mathrm{Vect}(v)$.

Garde-fou : Quoiqu'il arrive, $\dim\left(\mathrm{F}^\perp\right) = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$.

Pour déterminer une b.o.n. d'une somme $\mathrm{F} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{G}$ *de deux sous-ev orthogonaux,*

il suffit de juxtaposer une b.o.n. de F et d'une b.o.n. de G.

Ainsi, en juxtaposant une b.o.n. de F *et une b.o.n. de* $\mathrm{F}^\perp$*, j'obtiens une b.o.n. de* E*.*