1 Objectifs

Après avoir exploré les liens entre la loi exponentielle et la loi de Poisson, on met en évidence un paradoxe connu sous le nom de *paradoxe du bus*.

2 Cadre

λ désigne un réel de $]\,0\,;+\infty\,[$. Dans les simulations informatiques, λ prendra la valeur $1/10$, l'unité de temps sera la minute. On étudie ici une ligne de bus pour laquelle on suppose que le temps T séparant le passage entre deux bus suit une loi exponentielle de paramètre λ et est indépendant des temps de passage précédents.

☞ La ligne de bus est mise en service à l'instant $t = 0$;

☞ pour $k \in \mathbb{N}^*$, T_k désigne le temps écoulé entre le passage du $(k-1)^{\text{ème}}$ et du $k^{\text{ème}}$ bus, T_1 désignant l'heure de passage du premier bus ;

☞ pour $i \in \mathbb{N}^*$, $U_i = \sum_{k=1}^{i} T_k$ est ainsi l'heure de passage du $i^{\text{ème}}$ bus ;

☞ pour $t > 0$, N_t désigne le nombre de bus passés entre les instants 0 et t.

Les hypothèses de la modélisation sont :

pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $T_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et
les variables $(T_i)_{i\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes.

3 Nombre de bus passant en un temps donné

3.1 Simulations et conjecture

1. Pour $\lambda = 1/10$, quelle est la durée moyenne séparant le passage de deux bus ?

2. On rappelle que

`grand(1,1,'exp',m)`

simule une variable aléatoire de loi exponentielle d'espérance `m`.

a) Que simule la fonction suivante ?

```
function y=nbus(lambda,duree)
    y=0;
    t=grand(1,1,'exp',1/lambda);
    while t<duree then
        t=t+grand(1,1,'exp',1/lambda);
        y=y+1
    end
endfunction
```

b) Compléter l'algorithme suivant

```
duree=input('duree ?' )
n=.....;
simul=zeros(1,n);
for k=1:n
    simul(k)=nbus(..... , ........);
end
disp(mean(simul)); disp(variance(simul))
```

afin qu'il simule 10000 fois le comptage du nombre de passages de bus entre les instants $t = 0$ et $t =$`duree`, puis affiche la moyenne et la variance calculées sur ces 10000 simulations.

c) Compléter le tableau suivant :

durée	0h30	1h00	1h30	2h00
moyenne				
variance				

Quelles conjectures peut-on formuler grâce moyennes et variances observées ?

3.2 Étude expérimentale d'une conjecture

3. **a)** Parmi les lois discrètes, quelle est la seule pouvant être en accord avec les conjectures précédentes ?

b) En notant d la durée, quelle conjecture peut-on faire sur le lien entre le paramètre de cette loi et la durée d ?

c) Afin d'établir une conjecture sur le lien entre d et le paramètre λ de la loi exponentielle des T_k, effectuer à nouveau un jeu de simulations semblables à celles de la question 2, et remplir un tableau analogue à celui de 2.c), en prenant $\lambda = 1/5$ puis $\lambda = 1/20$.

d) Quelle conjecture peut-on émettre sur le lien entre λ et d ?

4. *Comparaison à une distribution de Poisson*

Afin de valider l'hypothèse

$\mathcal{H}$: « N_t suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$ »

nous allons comparer graphiquement les fréquences des différentes valeurs obtenues lors des simulations et la distribution théorique d'une loi de Poisson.

a) Exécuter le script de la question 2 en prenant à nouveau $\lambda = 1/10$, afin d'obtenir un vecteur `simul` contenant 10000 simulations de la variable N_{60}.

b) Exécuter le script suivant et expliquer ce qu'il trace.

```
classes=0:1:max(simul);
m=mean(simul)
freqtheo=exp(-m)*m .^classes ./factorial(classes);
plot2d(classes,cumsum(freqtheo))
```

c) On admet que la fonction `frequence` ci-après, appliquée à un vecteur `x`, permet d'obtenir un vecteur donnant les fréquences d'apparition de tous les entiers de 0 à max(`x`). Exécuter le script suivant et expliquer ce qu'il trace.

```
function y=frequence(x)
    l=length(x)
    x=[x,0:1:max(x)]
    y=tabul(x,"i")
    y=y(:,2)'
    y=(y-1)/l
endfunction
freqsim=frequence(simul);
plot2d(classes,cumsum(freqsim),-1)
```

d) Superposer les deux tracés précédents. Que révèlent clairement ces tracés ?

3.3 Justification théorique

5. **a)** Rappeler, pour $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de $\lambda \mathrm{U}_i$.

b) Soit $t \in]\,0\,;+\infty[$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Comparer les événements $[\mathrm{N}_t \geqslant k]$ et $[\mathrm{U}_k \leqslant t]$ et en déduire que N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

4 Le paradoxe du bus

La ligne de bus est mise en service à 6 heures du matin. Bien qu'il y ait en moyenne 10 minutes entre le passage de deux bus consécutifs (on reprend $\lambda = 1/10$), un passager probabiliste qui se présente tous les jours à 9 heures 5 minutes précises à l'arrêt de bus, s'étonne que son temps d'attente soit souvent plus élevé que 5 minutes. Peut-on l'aider à optimiser sa stratégie ?
Dans cette partie, le temps est toujours compté en minutes, et $t = 0$ correspond à 6 heures du matin.

6. **a)** Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule les passages des bus depuis 6 heures et jusqu'au premier bus que peut prendre le passager, et qu'elle renvoie alors le temps d'attente du passager.

```
function y=attente()
    t=0;
    while t<..... then
        t=t+grand(1,1,'exp',10);
    end
    y=......
endfunction
```

b) Exécuter plusieurs fois `attente()`.
L'impression du passager se confirme-t-elle ?

c) Afin de préciser cette impression, écrire un script réalisant 1000 simulations et calculant la moyenne des temps d'attente obtenus. Conclusion ?

7. Modifier le script précédent pour simuler le temps d'attente lorsque le passager se présente à 9 heures précises, puis à 9 heures 10. Qu'observez-vous ?

8. Modifier le script pour simuler le temps d'attente lorsque le passager se présente à un instant quelconque entre 9 heures et 9 heures 10 (son heure d'arrivée à l'arrêt de bus suivant la loi uniforme sur $[\,180\,;\,190\,]$). Qu'observez-vous ?

9. Un conseil à prodiguer au passager ?

10. Transformer la fonction `attente()` en une fonction `ecart()` donnant le temps écoulé entre le bus pris par le passager et le bus précédent.
Exécuter plusieurs fois `ecart()`, puis réaliser 1000 simulations et calculant la moyenne des écarts obtenus.
Paradoxal, non ?