1 Objectifs

Dans ce T.D., nous étudions les **chaînes de Markov** qui permettent de modéliser des systèmes aléatoires dont l'état à l'instant t est décrit par une variable aléatoire et ne dépend que de l'état à l'instant $t-1$. Les techniques employées reposent fortement sur l'algèbre linéaire : elles mettent en jeu le calcul de puissances $n^{\text{ème}}$ de matrices dites **stochastiques**.

2 Généralités

Entre deux oraux, le petit Nicolas, étudiant en prépa commerciale, décide d'aller faire quelques tours de manège à la Foire du Trône. Il monte exclusivement sur ses trois manèges préférés : l'Atomic Spicer, le Business Bull et le Critical Trader, que nous noterons A, B et C.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) les événements « le petit Nicolas effectue son $n^{\text{ème}}$ tour de manège sur le manège A (resp. B et C) ».

On note aussi a_n (respectivement b_n et c_n) la probabilité de A_n (resp. B_n et C_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire valant 1 (respectivement 2 et 3) lorsque le petit Nicolas effectue son $n^{\text{ème}}$ tour de manège sur le manège A (respectivement B et C).

Ainsi : $[\mathrm{X}_n = 1] = \mathrm{A}_n$, $[\mathrm{X}_n = 2] = \mathrm{B}_n$ et $[\mathrm{X}_n = 3] = \mathrm{C}_n$.

On note enfin U_n la colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{U}_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Le petit Nicolas effectue toujours son premier tour sur l'un des trois manèges, mais on ignore suivant quelle loi.

Lorsque le petit Nicolas a fini son $n^{\text{ème}}$ tour de manège, le choix du $(n+1)^{\text{ème}}$ manège ne dépend que du manège dont il vient de descendre.

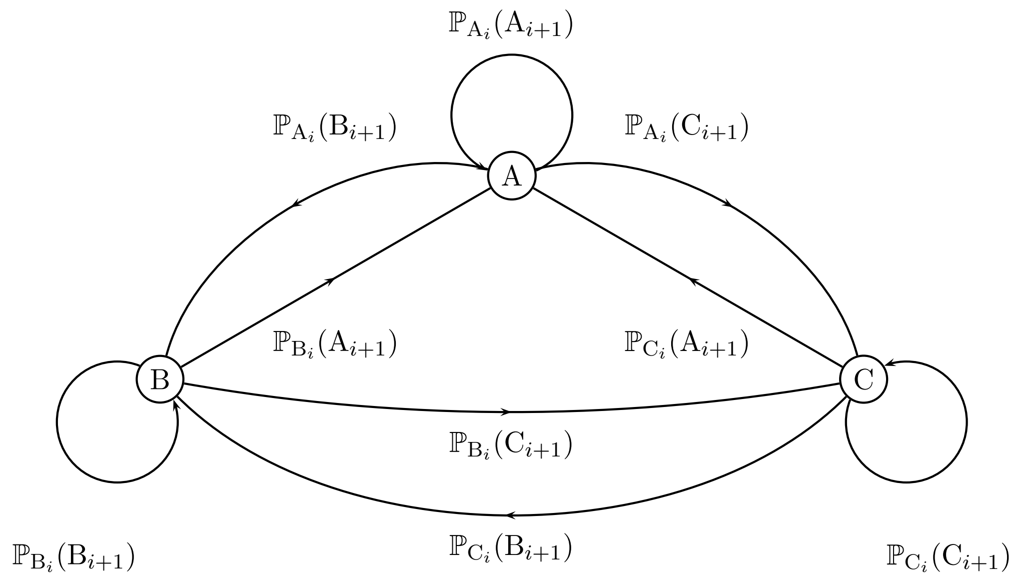
Autrement dit, les neuf probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{A}_{n+1}),\ \mathbb{P}_{\mathrm{B}_n}(\mathrm{A}_{n+1}),\ \mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{A}_{n+1}), \mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}_{n+1}), \ldots,\ \mathbb{P}_{\mathrm{C}_n}(\mathrm{C}_{n+1})$$

sont constantes, indépendantes de n.

Lorsque ces probabilités conditionnelles, dites *probabilités de transition* sont constantes au cours du temps, on dit que la chaîne de Markov est *homogène*.

Voici une petite illustration expliquant le terme de « chaîne » :



1. **a)** Que vaut U_1 si le petit Nicolas choisit son premier manège équiprobablement ? Et s'il commence toujours par le manège A ?

b) Montrer qu'il existe une matrice M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{U}_n.$$

La matrice M s'appelle la *matrice de transition* de cette chaîne de Markov.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{U}_n = \mathrm{M}^{n-1}\mathrm{U}_1$.

2. On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients sur chaque colonne vaut 1.

a) Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est stochastique si, et seulement si, tous ses coefficients sont positifs et ${}^t\mathrm{S}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, M^n est une matrice stochastique.

3. Soit S une matrice stochastique.

a) Montrer que ${}^t\mathrm{S}$ admet 1 pour valeur propre.

Qu'en déduire pour S ?

b) Montrer que toute valeur propre réelle λ de S vérifie $|\lambda| \leqslant 1$.

3 Trois exemples de calculs de puissance de matrices stochastiques

Dans cette partie, on reprend les notations de la précédente et on étudie trois exemples courants du comportement d'une chaîne de Markov.

4. Dans cette question, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^n.

b) Que dire de la loi de X_n pour $n \geqslant 2$?

5. Dans cette question, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 et donner un vecteur V_1 de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $E_1 = \text{Vect}(V_1)$.

b) Montrer que M admet une autre valeur propre que 1 et déterminer deux vecteurs W_1 et W_2 tels que $E_2 = \text{Vect}(W_1, W_2)$.

c) Justifier qu'il existe trois réels α_1, β_1 et β_2 tels que $U_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2$.

d) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $U_n = \alpha_1 V_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\beta_1 W_1 + \beta_2 W_2)$.

e) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = 1$.

f) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

g) Vers quelle loi s'approche la loi de X_n lorsque n devient grand ?

6. Dans cette question, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Étudier les suites $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et donner leur limite.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$.

c) Vers quelle loi s'approche la loi de X_n lorsque n devient grand ?

4 Simulation informatique de trois exemples.

Mise en garde importante !

• Dans la présentation précédente, on a adopté la convention d'écrire les vecteurs verticalement (en colonne) et de multiplier à gauche par la matrice de transition, avec comme relation de récurrence :

$$U_{n+1} = MU_n.$$

Ceci est conforme à nos habitudes en algèbre linéaire.

• Cependant, un usage assez répandu dans l'étude des chaînes de Markov est d'écrire le vecteur donnant la loi de X_n en ligne : $L_n = (a_n, b_n, c_n)$. La relation de récurrence devient alors

$$L_{n+1} = L_n P$$

où $P = {}^t M$ est encore appelée *matrice de transition*.

• Avec cette convention, une *matrice stochastique* est une matrice dont tous les coefficients sont positifs et dont *la somme des coefficients suivant chaque ligne vaut 1.*

• *En Scilab, cette dernière convention est celle utilisée par la fonction* `grand(n,'markov',P,x0)` que nous allons employer.

Dans cette partie, nous allons appréhender trois exemples grâce à une simulation informatique.
Pour cela, nous utiliserons la fonction `grand` qui permet, avec des paramètres bien précis, de simuler les chaînes de Markov, en respectant la syntaxe suivante :

`y=grand(n,'markov',P,x0)`.

L'exécution de `y=grand(n,'markov',P,x0)` fournit un vecteur `y` donnant les `n` valeurs successives d'une suite de variable X_i dont la matrice de transition est `P`, avec la convention expliquée ci-dessus et dont la valeur initiale est `x0`.

7. Dans cette question, on suppose que le petit Nicolas choisit à chaque tour son manège au hasard, équiprobablement, et indépendamment des tours précédents.

a) Exécuter plusieurs fois le script

```
m1=ones(3,3)/3;
```

```
n=40;
x=[0:n];
x0=grand(1,1,"uin",1,3);
y=[x0 grand(n,'markov',m1,x0)];
plot2d(x,y,-2)
plot2d(x,y)
```

en augmentant la valeur de `n` et expliquer ce que l'on voit.

b) Afin de visualiser les fréquences respectives des 3 manèges, on trace un diagramme en bâtons en remplaçant les deux dernières lignes du script précédent par

```
bar([length(find(y==1)) length(find(y==2)) length(find(y==3))])
```

Exécuter plusieurs fois ce nouveau script. Commentaire ?

8. Dans cette question, on suppose que :
❶ le petit Nicolas effectue toujours son premier tour de manège sur le manège A, le plus près de l'entrée ;
❷ lorsqu'il descend d'un manège, il choisit son prochain manège au hasard et équiprobablement parmi les deux autres manèges.
Reprendre la question précédente en adaptant le vecteur initial et la matrice de transition.

9. Dans cette question, on suppose que,
❶ le petit Nicolas effectue toujours son premier tour de manège sur le manège B, le plus coloré ;
❷ lorsqu'il descend du manège A ou du manège B, le petit Nicolas choisit son prochain manège au hasard et équiprobablement parmi les deux autres manèges ;
❸ lorsqu'il est sur le manège C, il y reste définitivement.
Reprendre la question précédente en l'adaptant à ce protocole.

10. Comparer les résultats des simulations informatiques de cette partie aux études menées dans la partie précédente.

5 Les dés de Platon

On s'intéresse au problème 389 du projet Euler (1). En voici l'énoncé :

(1). http ://projecteuler.net/problem=389

Platonic Dice (2)
An unbiased single 4-sided dice is thrown and its value, T, is noted.
T unbiased 6-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, C, is noted.
C unbiased 8-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, O, is noted.
O unbiased 12-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, D, is noted.
D unbiased 20-sided dice are thrown and their scores are added together. The sum, I, is noted.
Find the mathematical expectation of I, and give your answer rounded to 4 decimal places.

À l'aide de simulations, nous allons donner un ordre de grandeur pour l'espérance de I.

11. Justifier l'existence de l'espérance.

12. Que calcule la fonction suivante ?

```
function s=somme(n,f)
    s=sum(grand(1,n,"uin",1,f))
endfunction
```

13. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule I.

```
function I=platon
    I=1
    for k=[4 6 8 12 20]
       I=.........
    end
endfunction
```

14. Écrire une fonction `m=estime(n)` fournissant la moyenne de n simulations de I.

15. À l'aide de cette dernière fonction, donner un ordre de grandeur de $\mathbb{E}(\mathrm{I})$.

16. On admet (3) que $\mathbb{E}(\mathrm{I}) = \dfrac{85\,995}{32}$.
L'ordre de grandeur précédent est-il correct ?

(2). Pour mémoire, il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes, appelés *Solides de Platon*. Ce sont le tétraèdre (4 faces), le cube (ou hexaèdre) (6 faces), l'octaèdre (8 faces), le dodécaèdre (12 faces) et l'icosaèdre (20 faces). Chacun permet la réalisation d'un dé juste (*unbiased*) à n faces numérotées de 1 à n ($n \in \{4, 6, 8, 12, 20\}$)

(3). Et on peut le démontrer en utilisant les espérances conditionnelles.