1 Objectifs

Dans ce T.D., nous allons voir ou revoir, puis mettre en œuvre à l'aide de Scilab, des méthodes de résolution approchée d'équations numériques. Étant donnée une équation, on cherche des valeurs approchées de sa (ou ses) solution(s). Les questions que nous traiterons en T.D. d'informatique sur ordinateur sont signalées par ✌ .

2 Étude d'une suite

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'équation (E_n) par :

$$(\mathrm{E}_n) \qquad \ln(x) + n = x.$$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $[\,1\,;\,+\infty\,[$.
On note x_n cette solution. Que vaut x_1 ?

2. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant n$, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

b) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \big(n+\ln(n)\big) = 0$.
On peut ainsi écrire

$$x_n = n + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Remarque : Vous venez de trouver un développement asymptotique de x_n, c'est-à-dire une expression qui approche x_n lorsque n devient grand. Les plus perspicaces d'entre vous peuvent tenter de raffiner ce développement et montrer que

$$x_n = n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Malheureusement, un tel développement n'est pas intéressant lorsque n est petit. Aussi l'objet des parties suivantes est de trouver des méthodes d'approximation de x_n pour n petit, par exemple pour $n = 2$.

3. ✌ Écrire une fonction d'argument n calculant une valeur approchée de x_n par le développement asymptotique de la remarque précédente.

4. ✌ Quelle valeur approchée α de x_2 fournit cette fonction ?
Que vaut $\ln(\alpha) + 2 - \alpha$?

3 Recherche d'une valeur approchée de x_2 par dichotomie

Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$g : x \mapsto \ln(x) + 2 - x.$$

5. ✌ Représenter la courbe de g sur $]\,0\,;\,5\,]$ à l'aide de l'instruction `fplot2d`.

6. a) Étudier les variations de g.

b) Justifier que $x_2 \in [\,3\,;\,4\,]$.

7. *Méthode de dichotomie*
Soient a et b les suites réelles définies par :

$a_0 = 3$, $b_0 = 4$, et, pour tout n de $\mathbb{N}$,

- si $g(a_n)$ et $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$ sont de même signe,

$$\text{alors } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = b_n\,;$$

- si $g(a_n)$ et $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$ sont de signes contraires,

$$\text{alors } a_{n+1} = a_n \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}.$$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $a_n \leqslant x_2 \leqslant b_n$.

b) Montrer que les suites a et b sont convergentes, de limite x_2.

8. ✌ Écrire une fonction d'argument n calculant a_n et b_n.

9. ✌ Écrire une fonction d'argument e calculant une valeur approchée de x_2 avec une erreur inférieure à e.

10. ✌ Donner une valeur approchée de x_2 à 10^{-9}. Préciser l'indice des derniers termes des suites a et b calculés pour cette valeur approchée.

4 Recherche d'une valeur approchée de x_2 par approximations successives

On pourra utiliser l'encadrement : $1,25 \leqslant \ln\left(\frac{7}{2}\right) \leqslant 1,26$.

11. Soit $f : \left[\,3\,;\,\frac{7}{2}\,\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(x) + 2$.
Montrer que $f\left(\left[\,3\,;\,\frac{7}{2}\,\right]\right) \subset \left[\,3\,;\,\frac{7}{2}\,\right]$.

12. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_0 = 3 \text{ et, } \forall \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - x_2| \leqslant \dfrac{1}{3}\,|u_n - x_2|$.

b) Montrer alors que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $|u_n - x_2| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

c) Justifier que u_6 est une valeur approchée de x_2 à moins de $0,001$ près.

13. ✌ Écrire une fonction calculant le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite u.

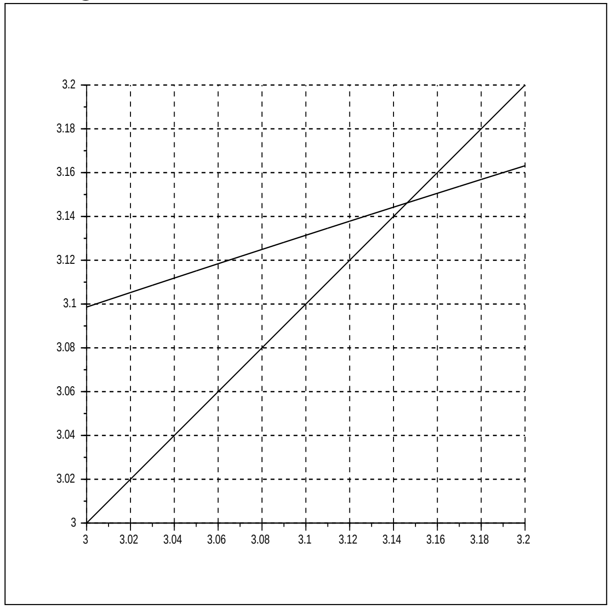
14. ✌ Écrire une fonction d'argument e calculant une valeur approchée de x_2 avec une erreur inférieure à e.

15. ✌ Donner une valeur approchée de x_2 à 10^{-9}. Préciser l'indice du dernier terme de la suite u calculé pour cette valeur approchée.

16. Le script suivant

```
x=3:.01:3.2;
plot2d(x,log(x)+2)
plot2d([3,3.2],[3,3.2])
```

a produit la figure :



Quels sont les graphiques ainsi représentés ?

17. Construire sur ce graphique les termes u_1, u_2 et u_3 et donner une valeur approchée de x_2 en précisant l'erreur maximum de cette approximation.

5 Méthode des tangentes de Newton.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- ✣ $v_0 = 3$;
- ✣ Pour $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ en v_n et de l'axe des abscisses.

18. Expliquer la méthode sur un croquis.

19. Vérifier qu'on est conduit à poser, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = h(v_n)$ où

$$h : \left[\,3\,;\,\tfrac{7}{2}\,\right] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x\big(1+\ln(x)\big)}{x-1}.$$

20. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[\,3\,;\,\tfrac{7}{2}\,\right]$, que $h\left(\left[\,3\,;\,\tfrac{7}{2}\,\right]\right) \subset \left[\,3\,;\,\tfrac{7}{2}\,\right]$, que $h(x_2) = x_2$ et $h'(x_2) = 0$.

21. On admet que : $\forall x \in \left[\,3\,;\,\tfrac{7}{2}\,\right],\quad |h''(x)| \leqslant \dfrac{1}{5}$.

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange (1), justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$|v_{n+1} - x_2| \leqslant \frac{|v_n - x_2|^2}{10}.$$

22. ✌ Sachant que `derivative(f,x)` calcule $f'(x)$ (où `f` est une fonction et `x` un réel), exploiter Scilab pour visualiser la majoration précédente de $|h''|$.

23. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|v_n - x_2| \leqslant 10 \times \left(\dfrac{1}{20}\right)^{(2^n)}$.

24. Justifier que v_3 est une valeur approchée de x_2 à moins de 10^{-9} près.

25. ✌ Écrire une fonction calculant le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite v et calculer v_3.

26. ✌ Écrire une fonction d'argument e calculant une valeur approchée de x_2 avec une erreur inférieure à e.

27. Vérifier qu'en remplaçant la fonction h par $x \mapsto \dfrac{x(n-1+\ln(x))}{x-1}$ au voisinage de x_n, on construit une suite qui converge aussi rapidement vers x_n, et ceci pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$.

28. ✌ Écrire une fonction de n calculant une valeur approchée précise de x_n.

Isaac Newton par Marcel Gotlib.

(1). Brook Taylor (Edmonton 1685 - Londres 1731) & Joseph Louis, comte de Lagrange (Turin 1736 - Paris 1813).