1 Objectifs

Dans ce T.D., nous allons représenter des surfaces définies par des équation du type
$$z = f(x,y)$$
et illustrer sur des exemples les notions de courbes de niveau, de gradient, de plan tangent.

2 Représentation des surfaces

Étant donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, pour faire représenter à Scilab la surface définie par
$$z = f(x,y)$$
il faut :

- définir la fonction f, par exemple :

```
function z=f(x,y)
 z=.........          ← expression de f(x,y) à l'aide de x et y
endfunction
```

- définir la partie de $\mathbb{R}^2$ sur laquelle on souhaite tracer la fonction, et avec quelle précision, par exemple :

`x=-2:0.2:2` fournit un vecteur dont les coordonnées vont de -2 à 2 avec un pas de $0,2$: $x = (-2; -1,8; -1,6; \dots; 1,8; 2)$

`y=-3:0.3:3` fournit un vecteur dont les coordonnées vont de -3 à 3 avec un pas de $0,3$: $y = (-3; -2,7; -2,4; \dots; 2,7; 3)$

- exécuter l'instruction

```
fplot3d(x,y,f)
```

qui va représenter la surface définie par f en plaçant tous les points $(x_i, y_j, z = f(x_i, y_j))$ où les x_i (respectivement y_i) sont les coordonnées des vecteurs `x` et `y`.

1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ et } g(x,y) = x^2 - y^2.$$

a) Faîtes tracer les surfaces représentant f et g sur le carré de $\mathbb{R}^2$ tel que $-2 \leqslant x, y \leqslant 2$.
À l'aide du clic droit de la souris, vous pouvez faire tourner ces surfaces.
Pour copier cette figure : par le menu « Fichier → Exporter vers ...», vous pouvez sauvegarder l'image sous différents formats, notamment .jpg et .bmp, mais aussi par le menu « Fichier → Export vectoriel vers ... » au format .pdf.

b) Quels sont les points critiques apparents sur ces surfaces ? Quel est le comportement des fonctions en ces points critiques ?

c) Vérifier par le calcul.

3 Lignes de niveau

Pour représenter les lignes de niveau, on utilise la fonction `contour` avec les mêmes arguments que `fplot3d`, en précisant soit :

☞ le nombre `N` de lignes de niveau souhaitées sur la figure ;
☞ la liste `[l1 l2 ... lN]` des niveaux désirés.

2. **a)** Tester `contour(x,y,f,10)`, puis `contour(x,y,f,(0:.25:2)^2)`.

b) En quoi ces représentation permettent-elle de penser que f atteint un extremum en $(0,0)$?

3. **a)** Pour g, représenter toutes les lignes de niveau -4 à 4 en allant de $0,5$ en $0,5$.

b) Interpréter ces lignes pour donner trois droites d_-, d_0 et d_+ passant par $(0,0)$ telles que :

- en suivant d_-, $g(0,0)$ soit un maximum ;
- en suivant d_0, g soit constante ;
- en suivant d_+, $g(0,0)$ soit un minimum.

c) Superposer le tracé de la surface et des courbes de niveau de g, et faîtes tourner.

4 Plans tangents

Petit rappel pour une fonction f d'une variable x.
Du développement limité
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$
découle l'approximation affine (obtenue en posant $x = x_0 + h$)
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette approximation affine est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0, et fournit l'équation de la *droite tangente* à $\mathcal{C}_f$ en x_0 :

$$\mathcal{T}_{x_0} : \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Et pour une fonction de deux variables ?

Du développement limité

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(||(h, k)||)$$

découle l'approximation affine (obtenue avec $x = x_0 + h$ et $y = y_0 + k$)

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Cette approximation affine est la meilleure approximation affine de f au voisinage de (x_0, y_0), et fournit l'équation du *plan tangent* à $\mathcal{S}_f$ en (x_0, y_0) :

$$\boxed{\mathcal{P}_{(x_0,y_0)} : \quad z = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

Si l'on préfère une écriture plus condensée, on peut poser $\mathrm{X}_0 = (x_0, y_0)$ et $\mathrm{X} = (x, y)$. Une équation du plan tangent est alors :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{X}_0} : \quad z = f(\mathrm{X}_0) + \langle \bigtriangledown f(\mathrm{X}_0), \mathrm{X} - \mathrm{X}_0 \rangle.}$$

4. On reprend la fonction f de la question 1.

a) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_{(1,1)}$ tangent à $\mathcal{S}_f$ en $(1, 1)$ et tracer sur une même figure la surface et le plan.

b) Exécuter plusieurs fois le script suivant en founissant différentes valeurs d'abscisses et d'ordonnées (comprises entre -2 et 2).

```
xM=input('Abscisse ')
yM=input('Ordonnée ')
zM=f(xM,yM)
function z=plan(u,v)
 z=zM+2*xM*(u-xM)+2*yM*(v-yM)
endfunction
fplot3d(x,y,f)
fplot3d(x,y,plan)
```

c) Caractériser le plan tangent au point critique.

5. Adapter le script précédent à la fonction g, et caractériser le plan tangent au point critique.

5 Interprétation du gradient

Dans cette partie, nous allons représenter sur un même graphique des lignes de niveau et des gradients.
Nous avions vu que la dérivée de f en X_0 dans la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$ est donnée par :

$$\langle \bigtriangledown f(\mathrm{X}_0), \overrightarrow{u} \rangle.$$

Elle mesure *la variation de f (croissance ou décroissance) lorsque, partant de X_0, on suit la direction de $\overrightarrow{u}$.*
À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en prenant $\overrightarrow{u}$ unitaire, nous avons

$$|\langle \bigtriangledown f(\mathrm{X}_0), \overrightarrow{u} \rangle| \leqslant ||\bigtriangledown f(\mathrm{X}_0)||,$$

avec égalité si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\bigtriangledown f(\mathrm{X}_0)$.
Ainsi, *le gradient indique la direction de la plus forte pente.*

6. a) Exécuter le script suivant, et observer :

```
x=-2:.1:2; y=x;
contour(x,y,f,10)
x=-2:.4:2; y=x;
vx=zeros(11,11);
vy=vx;
for i=1:11
    for j=1:11
        vx(i,j)=2*x(i);
        vy(i,j)=2*y(j);
    end
end
champ(x,y,vx,vy)
```

où la fonction `champ` permet de représenter un *champ de vecteur* : en chaque point M_0 de coordonnées `x(i)` et `y(j)`, Scilab trace le vecteur de coordonnées (`vx(i,j)`,`vy(i,j)`).

b) Adapter le script précédent à g ... et observer.

7. Que dire de l'angle formé par les lignes de niveau et les gradients ? Justifier votre conjecture à l'aide des rappels précédents.