Exercice 12.1 *Nature de parties de $\mathbb{R}^2$*

Représenter A et B et dire si ce sont des parties ouvertes, fermées ou bornées :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < |y - 2| < 4\}$;

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^3 \leqslant y \leqslant x^2\}$;

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 1\}$.

Exercice 12.2 *Exemple polynomial à trois variables*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz - 6x + 2z + 3$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(1, 0, 0)$.

3. Étudier si f présente un extremum en $(1, 0, 0)$.

Exercice 12.3 *Recherche par un développement limité*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$.

1. Montrer que $(0; 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont trois points critiques de f.

2. **a)** Quel est le signe de $f(x, x)$ et de $f(x, -x)$ sur $]-2\,;\,2[\setminus \{0\}$?

b) En déduire que f n'atteint pas d'extremum local en $(0, 0)$.

3. **a)** Montrer que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(\sqrt{2} + h, -\sqrt{2} + k) = 8 - 10h^2 - 10k^2 - 4hk + h^2\varepsilon(h) + k^2\eta(k)$$
avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\lim\limits_{k\to 0} \eta(k) = 0$.

b) Montrer que f atteint un maximum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

c) Retrouver ce résultat en s'appuyant sur les valeurs propres de la hessienne.

4. Par un argument de symétrie, étudier la nature du point critique $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

5. Montrer que ces trois points sont les uniques points critiques de f.

Exercice 12.4 *Un soupçon de géométrie*

1. Dans l'espace usuel de la géométrie, soit A un point quelconque et $\mathcal{P}$ un plan tout aussi quelconque.
À l'aide du théorème de Pythagore (dans sa version géométrique vue au collège), montrer que le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ (défini par $H \in \mathcal{P}$ et $(AH) \perp \mathcal{P}$) est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A, et que ce point est unique.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, quel est le point du plan d'équation $x + y + z = 1$ le plus proche de l'origine ? On traduira le problème en la recherche d'extremum d'une fonction.

Exercice 12.5 *f sous g, puis g sous f avec inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit $I =]0\,;\,+\infty[$, $f, g : I^3 \to \mathbb{R}$ avec $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $g : (x, y, z) \mapsto x + y + z$.

1. **a)** Déterminer les points critiques de f sous la contrainte : $g(x, y, z) = 1$.

b) Déterminer les points critiques de g sous la contrainte : $f(x, y, z) = 1$.

2. **a)** Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $u = (x, y, z)$ et $v = (1, 1, 1)$.

b) En déduire la nature des points critiques de la question précédente.

Exercice 12.6 *INSEEC 2000*

Un industriel veut faire fabriquer un réservoir de forme rectangulaire de volume $4m^3$, sans couvercle, dont le fond est un rectangle de côtés x et y et dont la hauteur est z (tout ça en métre(s)). Il veut que la somme des aires des 5 rectangles à découper soit minimale.

1. Montrer que ce problème se ramène à la recherche du minimum de la fonction $f(x, y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$ sur $D =]0\,;\,+\infty[^2$.

2. Montrer que f admet un unique minimum local sur D, en un point (a, b) à préciser.

3. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 3x \geqslant 2, 3y \geqslant 2 \text{ et } xy \leqslant 12\}$.
Justifier que F est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que, si $3x \leqslant 2$, ou $3y \leqslant 2$, ou $xy \geqslant 12$, alors $f(x, y) > f(a, b)$.

5. En déduire la solution du problème de l'industriel.

Exercice 12.7 *Sur un rectangle*

Soit $A = (0, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ et $D = (0, -1)$.

Soit $\mathcal{R}$ le rectangle fermé ABCD. Soit $f(x, y) = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum dans $\mathcal{R}$.

2. Déterminer ces extremums.

Exercice 12.8 *Sur un disque*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D le disque fermé de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 2.

a) Montrer : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 4P(\cos\alpha)$.

b) Étudier les extremums de P sur $[-1\,;\,1]$.

c) En déduire les extrema globaux de f sur D.

Exercice 12.9 *Extremum libre, puis sous une contrainte linéaire*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}$.

1. **a)** Étudier l'existence d'extremum de f.

b) f est-elle majorée ? Quel est sont plus grand minorant ?

2. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ défini par : $\quad \mathcal{H} : x_1 + \cdots + x_n = 0$.

a) Déterminer le seul point critique A de f pour l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{H}$.

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^t \geqslant 1+t$, et en déduire que f atteint en A un minimum global sous la contrainte $\mathcal{H}$.

Exercice 12.10 *Extremum sous un système de contraintes linéaires*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}$ une contrainte définies par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z \quad \text{et} \quad \mathcal{C} : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{H}$ la contrainte homogène associée à $\mathcal{C}$.

1. Déterminer l'unique point critique A de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.
2. Montrer à l'aide du développement limité à l'ordre 2 en A que f admet un maximum local en A sous la contrainte $\mathcal{C}$.
3. Montrer, en exprimant y et z en fonction de x, que cet extremum est global.

Exercice 12.11 *Variance minimale, variance maximale*
Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{1,2,3\}$.
On pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![1\,;\,3]\!]$ et on cherche pour quelles valeurs de p_1, p_2 et p_3 $\mathbb{V}(X)$ est maximale. et pour quelles valeurs $\mathbb{V}(X)$ est minimale.

1. Montrer que ce problème se ramène à la recherche des extremums de
$$f : (p_1, p_2) \mapsto 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2$$
sur le domaine fermé et borné $D = \{(p_1,p_2) \in [\,0\,;\,1\,]^2, p_1 + p_2 \leqslant 1\}$.
2. Résoudre le problème, et commenter les résultats.

Correction

Exercice 12.1 *Nature de parties de* $\mathbb{R}^2$

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < |y-2| < 4\}$ ouverte non bornée ;
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^3 \leqslant y \leqslant x^2\}$ fermée bornée ;
3. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 1\}$ ouverte non bornée.

Exercice 12.2 *Exemple polynomial à trois variables*

1. $(1,0,0)$ unique point critique.
2. $f(1+h_1, h_2, h_3) = 3h_1^2 + h_2^2 + 3h_3^2 - 2h_1h_3 + o(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$.
3. $S = \nabla^2(f)(1,0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Version valeurs propres

$S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(1,0,0)) = \{2,4,8\} \subset]\,0\,;\,+\infty\,[$ donc minimum en $(1,0,0)$.

Carrés de Gauss

$q_A(H) = 6h_1^2 + 2h_2^2 + 6h_3^2 - 4h_1h_3 = 6(h_1 - h_3/3)^2 + 2h_2^2 + 16h_3^2/3$ est manifestement définie positive, donc minimum.

Exercice 12.3 *Recherche par un développement limité*

1. f est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
$\forall (x,y); \in \mathbb{R}^2, \nabla f(x,y) = (4x - 4y - 4x^3, -4x + 4y - 4y^3)$.
$\nabla f(0;0) = \nabla f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \nabla f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (0,0)$... sont trois points critiques de f.

2. **a)** $\forall x \in]-2\,;\,2\,[\setminus \{0\}$, $f(x,x) = -2x^4 < 0 \quad (1)$ et
$f(x,-x) = 8x^2 - 2x^4 = 2x^2(4 - x^2) = 2x^2(2-x)(2+x) > 0 \quad (2)$.

b) Comme $f(0,0) = 0$, (1) montre que f n'atteint pas de minimum local en $(0,0)$ et (2) montre que f n'atteint pas de maximum local en $(0,0)$.

3. **a)** Rappelons que (binôme de Newton) :
$(\pm\sqrt{2} + \alpha)^4 = 4 \pm 8\sqrt{2}\alpha + 12\alpha^2 \pm 4\sqrt{2}\alpha^3 + \alpha^4$.
$f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) = 2(2\sqrt{2} + h - k)^2$
$\quad -4 - 8\sqrt{2}h - 12h^2 + h^3P(h)$
$\quad -4 + 8\sqrt{2}k - 12k^2 + h^3Q(h)$
où P et Q sont des polynômes.
$f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) = 8 - 10h^2 - 10k^2 - 4hk + h^2\varepsilon(h) + k^2\eta(k)$
où $\varepsilon(h) = hP(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\eta(k) = kQ(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$.

b) Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8$,
$f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -10h^2 - 10k^2 - 4hk + h^2\varepsilon(h) + k^2\eta(k)$
$= -2(h+k)^2 - h^2(8 + \varepsilon(h)) - k^2(8 + \eta(k))$
Comme $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\eta(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$, par définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que
$\forall h \in]-\alpha\,;\,\alpha\,[, \forall k \in]-\beta\,;\,\beta\,[, \varepsilon(h) > -8$ et $\eta(k) > -8$. Ainsi :
$\forall (h,k) \in \left(]-\alpha\,;\,\alpha\,[\times]-\beta\,;\,\beta\,[\right) \setminus \{(0,0)\}$,
$f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) < 0$
Donc f atteint un maximum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

c) La hessienne H vaut $\begin{pmatrix} -20 & -4 \\ -4 & -20 \end{pmatrix}$. -24 est valeur propre puisque $H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$-24\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Deux options pour l'autre valeur :

• Comme H est diagonalisable car symétrique réelle, l'autre valeur propre est $\mathrm{Tr}(\mathrm{H})-(-24)=-16$: les deux valeurs propres de la hessienne sont strictement négatives, donc f atteint un maximum ...

• Puisque $\mathrm{E}_{-24}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est vecteur propre, $\mathrm{E}_{-24}^{\perp}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ donc $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Alors $\mathrm{H}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-16\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ montre que -16 est l'autre valeur propre. Même conclusion...

4. On a : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=f(y,x)$. Alors :
$\forall(h,k)\in\big(\,]-\alpha\,;\,\alpha\,[\times]-\beta\,;\,\beta\,[\,\big)\setminus\{(0,0)\}$,
$f(-\sqrt{2}+h,\sqrt{2}+k)-f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=f(\sqrt{2}-h,-\sqrt{2}-k)-f(\sqrt{2},-\sqrt{2})<0$
car $(-h,-k)\in\big(\,]-\alpha\,;\,\alpha\,[\times]-\beta\,;\,\beta\,[\,\big)\setminus\{(0,0)\}$.
Donc f atteint un maximum local en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

5. $\nabla f(x,y)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}x-y-x^3=0\\-x+y-y^3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^3+y^3=0\ (\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2)\\x-y-x^3=0\end{cases}\Rightarrow$
$\begin{cases}y=-x\\2x-x^3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\x(2-x^2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\x=0\text{ ou }x=\sqrt{2}\text{ ou }x=-\sqrt{2}\end{cases}$
Ce qui montre que les trois points précédents sont les uniques points critiques de f.

Exercice 12.4 *Un soupçon de géométrie*

1. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $\mathrm{AM}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{HM}^2$ car AHM est rectangle en H. Donc $\mathrm{AM}^2\geqslant\mathrm{AH}^2$, avec égalité si, et seulement si, M = H. Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

2. Pour $\mathrm{M}=(x,y,z)\in\mathcal{P}$, on a $z=1-x-y$ donc $\mathrm{OM}^2=x^2+y^2+(1-x-y)^2$. On pose alors $f(x,y)=x^2+y^2+(1-x-y)^2$. D'après la question précédente, f admet un minimum global, reste à trouver où il est atteint.
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$\nabla f(x,y)=(2x-2(1-x-y),2y-2(1-x-y))=(4x+2y-2,4y+2x-2)$, donc $\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow(x,y)=(1/3,1/3)$
Comme il n'y a qu'un point critique, c'est forcément le point cherché. Le point le plus proche de O dans $\mathcal{P}$ est $(1/3,1/3,1/3)$.

Exercice 12.5 *f sous g, puis g sous f et inégalité de Cauchy-Schwarz*

1. a) $\nabla(g)(x,y,z)=(1,1,1)$ donc la contrainte est non critique sur I^3.
Un point est critique pour f sous la contrainte $g(x,y,z)=1$ s'il existe λ tel que $\nabla(f)(x,y,z)=\lambda\nabla(g)(x,y,z)$ et $g(x,y,z)=1$. Donc $x=y=z=\ldots1/3$ et $\lambda=2/3$.

b) De même, $\nabla(f)(x,y,z)=(2x,2y,2z)\neq0$ sur I^3 : contrainte non critique.
$\nabla(g)(x,y,z)=\lambda\nabla(f)(x,y,z)\Rightarrow x=y=z$.
Et $f(x,y,z)=1\Rightarrow x=y=z=1/\sqrt{3}=\sqrt{3}/3$.

2. a) $||u||^2\,||v||^2\geqslant\langle u,v\rangle^2\Rightarrow3f(u)\geqslant g(u)^2$, avec égalité si, et seulement si, $x=y=z$ (u et v colinéaires).

b) Sous la contrainte $g(u)=1$, $f(u)\geqslant1/3$, atteint en $(1/3,1/3,1/3)$. C'est un minimum global sous cette contrainte.
Sous la contrainte $f(u)=1$, $g(u)\leqslant\sqrt{3}$, atteint en $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. C'est un maximum global sous cette contrainte.

Exercice 12.6 *INSEEC 2000*

1. $xyz=4\Rightarrow z=4/(xy)$. Aire $=f(x,y)=xy+2xz+2yz=xy+\dfrac{8}{x}+\dfrac{8}{y}$.

2. $\nabla(f)(x,y)=(y-8/x^2,x-8/y^2)$, $\nabla^2(f)(x,y)=\begin{pmatrix}16/x^3&1\\1&16/y^3\end{pmatrix}$, $\nabla(f)(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow(x,y)=(2,2)$,
$\nabla^2(f)(2,2)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Version Carrés de Gauss
$q_{(2,2)}(h_1,h_2)=2h_1^2+2h_1h_2+2h_2^2=2(h_1+h_2/2)^2+3h_2^2/2$ manifestement définie positive, donc un minimum.

Version valeurs propres
$\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(2,2))=\{1,3\}\subset\,]\,0\,;+\infty\,[$, donc un minimum.

3. • F est défini à l'aide d'inégalités larges sur les fonctions continues $(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto y$ et $(x,y)\mapsto xy$, donc F est fermé.
• Soit $\mathrm{M}=(x,y)\in\mathrm{F}$.
$(xy\leqslant12$ et $x\geqslant2/3)\Rightarrow x\leqslant18)$ et $(xy\leqslant12$ et $y\geqslant2/3)\Rightarrow y\leqslant18)$.
Donc $\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant18$ et $\dfrac{2}{3}\leqslant y\leqslant18$ ce qui prouve que F est bornée puisqu'alors $||\mathrm{M}||\leqslant\sqrt{18^2+18^2}\leqslant18\sqrt{2}$.

4. Notons F_o l'intérieur de F, c'est-à-dire F privé de sa frontière. Observons que $f(a,b)=f(2,2)=12$. Soit $(x,y)\in\mathrm{D}\setminus\mathrm{F}_o$.
• Si $x\leqslant2/3$, $8/x\geqslant12$, alors $f(x,y)>12$.
• Si $y\leqslant2/3$, $8/y\geqslant12$, alors $f(x,y)>12$.

- Si $xy \geqslant 12$, alors $f(x,y) > 12$.

Comme on est forcément en présence de l'un au moins de ces cas, $f(x,y) > f(a,b)$.

5. Le minimum de f sur F, fermée et bornée, est atteint

- soit sur l'ouvert intérieur F_o, et dans ce cas c'est en un point critique. Par 2), c'est 12 en $(2,2)$;
- soit sur la frontière, mais sur la frontière qui est une partie de $\mathrm{D} \setminus \mathrm{F}_o$, f est strictement supérieure à 12.

Donc le minimum global de f sur F est 12.

- Et d'après 4), c'est le minimum de f sur D.

Un réservoir de mesures $x = y = 2$ et $z = 1$ est la solution optimale.

Exercice 12.7 *Sur un rectangle*

1. f est polynomiale donc continue sur le fermé borné $\mathcal{R}$, donc elle y atteint un maximum et un minimum.

2. Cherchons les extrema locaux à l'**intérieur** du rectangle. f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale.

$\nabla(f)(x,y) = (-6x^2 - 2x, -2y)$,

$\nabla(f)(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow ((x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (-1/3, 0))$

$(0,0)$ n'est pas à l'intérieur du rectangle.

$\nabla^2 f(-1/3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: les deux valeurs propres sont non nulles de signes opposés, donc il n'y a pas d'extremum en $(-1/3, 0)$.

Bilan : aucun extremum à l'intérieur de $\mathcal{R}$.

Promenons-nous sur la frontière.

Sur [AB] : $g(x) = f(x,1) = -2x^3 - x^2 + 4$ pour $x \in [-1\,;\,0]$ $g'(x) = -6x^2 - 2x = -2x(3x+1)$, g décroît sur $[-1\,;\,-1/3]$ et croît sur $[-1/3\,;\,0]$. $g(-1) = 5$, $g(-1/3) = 4 - 1/27$ et $g(0) = 4$.

Sur [BC] : $h(y) = f(-1,y) = 6 - y^2$ pour $y \in [-1\,;\,1]$, maximum pour $y = 0$, minimum pour $y = \pm 1$. $h(0) = 6$, $h(\pm 1) = 5$.

Sur [CD] : $f(x,-1) = -2x^3 - x^2 + 4 = g(x)$ pour $x \in [-1\,;\,0]$ déjà étudié : g décroît sur $[-1\,;\,-1/3]$ et croît sur $[-1/3\,;\,0]$. $g(-1) = 5$, $g(-1/3) = 4 - 1/27$ et $g(0) = 4$.

Sur [AD] : $j(y) = f(0,y) = 5 - y^2$ pour $y \in [-1\,;\,1]$, maximum pour $y = 0$, minimum pour $y = \pm 1$. $j(0) = 5$, $j(\pm 1) = 4$.

Bilan : sur $\mathcal{R}$, le minimum de f est $4 - 1/27$ atteint en $(-1/3, 1)$ et $(-1/3, -1)$, et le maximum est 6 atteint en $(-1, 0)$.

Exercice 12.8 *Sur un disque*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 + y^2$.

1. f est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$. $(0,0)$ est l'unique point critique, avec $f(0,0) = 0$, mais $f(x,0) = x^3$ est du signe de x donc

$\forall x > 0, f(x,0) > f(0,0)$ et $\forall x < 0, f(x,0) < f(0,0)$: pas d'extremum local en $(0,0)$.

2. Soit D le disque fermé de centre $\mathrm{O} = (0,0)$ et de rayon 2.

a) Montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 4\mathrm{P}(\cos\alpha).$$

$f(2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4\sin^2(\alpha) = 8\cos^3(\alpha) + 4(1 - \cos^2(\alpha)) = 4\mathrm{P}(\cos\alpha)$ où $\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$.

b) $\mathrm{P}' = 6\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} = 2\mathrm{X}(3\mathrm{X} - 1)$, P croît sur $[-1\,;\,0]$, décroît sur $[0\,;\,1/3]$ et croît sur $[1/3\,;\,1]$.

$\mathrm{P}(-1) = -2$, $\mathrm{P}(0) = 1$, $\mathrm{P}(1/3) = 26/27$ et $\mathrm{P}(1) = 2$.

Le maximum de P est 2, le minimum -2.

c) En déduire les extrema globaux de f sur D.

D est un fermé borné.

À l'intérieur du disque, il n'y a pas d'extremum local d'après 1.

Sur la frontière, pour chaque point du cercle il existe $\alpha \in [0\,;\,2\pi[$ tel que $\mathrm{M} = (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$. Alors $f(\mathrm{M}) = 4\mathrm{P}(\cos(\alpha)) \in [-8\,;\,8]$ d'après 2.b)

De plus, $f(\mathrm{M}) = -8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = -2$ donc pour $\cos(\alpha) = -1$, donc pour $\alpha = \pi$, donc pour $\mathrm{M} = (-2, 0)$.

De même, $f(\mathrm{M}) = 8$ pour $\mathrm{P}(\cos(\alpha)) = 2$ donc pour $\cos(\alpha) = 1$, donc pour $\alpha = 0$, donc pour $\mathrm{M} = (2, 0)$.

Les extremums de f sur D sont -8 et 8 atteints en $(-2, 0)$ et $(2, 0)$ respectivement.

Exercice 12.9 *Extremum libre, puis sous une contrainte linéaire*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{e}^{x_1} + \cdots + \mathrm{e}^{x_n}.$$

1. **a)** $\nabla(f)(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x_1}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n}) = 0$: cette équation est sans solution puisque exp prend des valeurs non nulles.

f n'a pas d'extremum puisqu'elle n'a pas de point critique.

b) $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} f(x_1, \ldots, x_1) = \lim\limits_{x_1 \to +\infty} n\mathrm{e}^{x_1} = +\infty$ donc f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^n$.

0 est un minorant de f, et comme $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} f(x_1, \ldots, x_1) = \lim\limits_{x_1 \to -\infty} n\mathrm{e}^{x_1} = 0$, 0 est le plus grand minorant de f.

2. **a)** $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}((1, \ldots, 1))$.

$\nabla(f)(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^\perp \Rightarrow \mathrm{e}^{x_1} = \cdots = \mathrm{e}^{x_n} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n$

Et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Réciproquement, $\nabla(f)(0) \in \mathcal{H}^\perp$ et $0 \in \mathcal{H}$.

Le seul point critique de f pour l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{H}$ est $\mathrm{A} = 0$.

b) • exp est convexe car $\exp^{(2)} > 0$ et $y = x + 1$ est l'équation de la tangente à sa courbe en 1, donc $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geqslant 1 + t$.

• $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}, f(x_1, \ldots, x_n) = e^{x_1} + \cdots + e^{x_n} \geqslant (x_1 + 1) + \cdots + (x_n + 1) = x_1 + \cdots + x_n + n = n = f(A)$...

EXERCICE 12.10 *Extremum sous un système de contraintes linéaires*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{C}$ une contrainte définies par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 - 2xy + yz + y - z \quad \text{et} \quad \mathcal{C} : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

On note $\mathcal{H}$ la contrainte homogène associée à $\mathcal{C}$.

1. $\nabla(f)(x, y, z) = (2x - 2y, -2x + z + 1, y - 1)$, $\mathcal{H} : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

$\mathcal{H}^\perp = \text{Vect}((2, -1, 0), (1, 0, 1))$.

• $\nabla(f)(x, y, z) \in \mathcal{H}^\perp \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} 2x - 2y = 2\alpha + \beta \\ -2x + z + 1 = -\alpha \\ y - 1 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x = 2\alpha + 3\beta + 2 \\ y = 1 + \beta \\ Z = \alpha + 3\beta + 1 \end{cases}$$

• (x, y, z) vérifie $\mathcal{C}$ entraîne $\begin{cases} \alpha = 2/5 \\ \beta = -2/5 \end{cases}$

On obtient alors $A = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

2. $\nabla^2(f)(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{H} = \text{Vect}((1, 2, -1))$.

Rappelons que $A + H$ vérifie $\mathcal{C}$ si, et seulement si, H vérifie $\mathcal{H}$.

$\forall H = (\alpha, 2\alpha, -\alpha) \in \mathcal{H}, f(A + H) - f(A) = \langle \nabla(f)(A), H\rangle + \frac{1}{2} q_A(H) + ||H||^2 \varepsilon(H)$

avec $\langle \nabla(f)(A), H\rangle = 0$ car $\nabla(f)(A) \in \mathcal{H}^\perp$

et $q_A(H) = 2\alpha^2 - 8\alpha^2 - 4\alpha^2 = -5\alpha^2$.

$f(A + H) - f(A) = -5\alpha^2 + \alpha^2 \varepsilon(\alpha)$ est négatif au voisinage de 0 : $f(A)$ est un maximum local sous la contrainte $\mathcal{C}$.

3. En traduisant la contrainte par $y = 2x - 1$ et $z = 1 - x$,

$$f(x, y, z) = f(x, 2x - 1, 1 - x) = -5x^2 + 8x - 3 = -5\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} - 3$$

$$f(x, y, z) = -5\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}.$$

Or $f(A) = \frac{1}{5}$.

Donc $f(x, y, z) - f(A) = -5\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 \leqslant 0$

Donc f atteint en A un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C}$. Ce maximum peut être qualifié de strict car il n'est atteint que pour $x = 4/5$, donc $y = 3/5$ et $z = 1/5$, donc en A.

EXERCICE 12.11 *Variance minimale, variance maximale*

1. En substituant $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ dans $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p_1 + 4p_2 + 9p_3 - (p_1 + 2p_2 + 3p_3)^2$, on obtient $\mathbb{V}(X) = 4p_1 + p_2 - 4p_1^2 - p_2^2 - 4p_1p_2 = f(p_1, p_2)$.
La condition $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ conduit au domaine D.

2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ car polynomiale sur l'intérieur de D.
$\nabla f(p_1, p_2) = (0, 0)$ conduit à un système linéaire sans solution. f n'a pas de point critique donc pas d'extremum à l'intérieur de D.
$g : x \mapsto x(1 - x)$ atteint son maximum sur $[0 ; 1]$ qui vaut $1/4$ en $x = 1/2$, or $f(p_1, 0) = 4g(p_1)$, $f(0, p_2) = g(p_2)$ et $f(1 - p_2, p_2) = g(p_2)$ donc le maximum de f sur le bord de D est $4 \times \frac{1}{4} = 1$ obtenu pour $p_1 = 1/2$ et $p_2 = 0$.
$\mathbb{V}(X)$ est maximum pour $p_1 = p_3 = 1/2$ et $p_2 = 0$, c'est-à-dire $X \hookrightarrow \mathcal{U}\{1; 3\}$.
$\mathbb{V}(X)$ est minimum pour $(p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 0)$, $(p_1, p_2, p_3) = (0, 1, 0)$ ou $(p_1, p_2, p_3) = (0, 0, 1)$ c'est-à-dire lorsque X est constante.