Exercice 3.1 *La loi du sauteur en hauteur.*

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la $n^{\text{ème}}$ barre est $\dfrac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.
On note X la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

2. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 3.2 *Sans espoir ...*

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.
On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur.
On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer la loi de T et vérifier que $\displaystyle\sum_{n \in T(\Omega)} P(T = n) = 1$.

Indication : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

2. T possède-t-elle une espérance ?

Exercice 3.3 *Sommes très aléatoires.*

Une urne contient n ($n \in \mathbb{N}^*$) jetons numérotés de 1 à n. On tire une poignée de jetons au hasard dans l'urne. On note Y le nombre de jetons tirés et on suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0\,;n]\!])$. On note X la somme des numéros figurant sur les jetons tirés, en convenant que $X = 0$ si $Y = 0$.
Pour k dans $[\![1\,;n]\!]$, on note X_k la variable indicatrice de l'événement *« le $k^{\text{ème}}$ jeton est dans la poignée tirée »*.

1. **a)** Pour j dans $[\![0\,;n]\!]$, quelle est la loi de X_k conditionnée par $[Y = j]$?

b) En déduire $\mathbb{E}(X_k)$ puis $\mathbb{E}(X)$.

2. **a)** Déterminer la loi de X_k et retrouver $\mathbb{E}(X)$.

b) Les variables $(X_k)_{k=1}^{n}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.4 *Stratégie pour QCM.*

Un examen se déroule sous forme d'un questionnaire à choix multiple (QCM) où on pose 20 questions, chaque question comportant 4 réponses possibles dont une seule est la bonne. Une bonne réponse est récompensée par 3 points tandis qu'une mauvaise réponse est pénalisée par -1 point. Le programme de l'examen porte sur 100 questions dont on tirera aléatoirement les 20 de l'examen.

On considère un candidat maîtrisant une proportion p ($p \in [0\,;1]$) du programme. On note N la note obtenue par ce candidat.

1. Soit X le nombre de questions posées à l'examen et maîtrisées par le candidat.

a) Soit, pour tout i de $[\![1\,;20]\!]$, X_i la variable indicatrice de l'événement : *« le candidat maîtrise la question numéro i »*. Indiquer la loi de chaque X_i.

b) En déduire l'espérance de X.

2. Dans cette question, on suppose que le candidat ne répond pas aux questions qu'il ne maîtrise pas. Déterminer $\mathbb{E}(N)$.

3. Dans cette question, on suppose que le candidat répond au hasard aux questions qu'il ne maîtrise pas. On note Y le nombre de bonnes réponses données par le candidat parmi les $20 - X$ questions qu'il ne maîtrise pas.

a) En supposant $[X = k]$ (pour k fixé dans $[\![0\,;20]\!]$), quelle est la loi de Y ?

b) Calculer, pour k dans $[\![0\,;20]\!]$, $\mathbb{E}(Y|(X = k))$ et en déduire $\mathbb{E}(Y)$.

c) En déduire $\mathbb{E}(N)$. Conclusion ?

Exercice 3.5 *Conditionnement : autour des lois usuelles.*

1. Montrer que si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement, alors la loi conditionnelle de X sachant $(X+Y = n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(Y = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 3.6 *Minimum et maximum de deux uniformes indépendantes.*

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire dans cette urne successivement avec remise deux boules, en notant X et Y les numéros de la première et de la seconde boule tirée respectivement. On note enfin : $I = \inf(X, Y)$ et $S = \sup(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de X et de Y. Que vaut $\mathbb{E}(S + I)$?

2. Calculer $\mathbb{P}(S \leqslant k)$ et en déduire la loi de S, ainsi que son espérance.

3. Calculer $\mathbb{P}(I \geqslant k)$ et en déduire la loi de I.

4. Déterminer la loi conjointe de S et de I.

Exercice 3.7 *Bluff.*

Je tire 4 cartes successivement avec remise dans un jeu de 32 cartes. Quand j'ai tiré au moins une carte rouge, j'annonce le nombre de cartes rouges obtenues et quand je n'en ai pas tirée, je bluffe et annonce un nombre au hasard entre 1 et 4.

On note X le nombre de carte(s) rouge(s) réellement tirée(s) et Y le nombre annoncé.

1. **a)** Déterminer la loi de Y sachant $[X = k]$ pour k dans $[\![0\,;4]\!]$.

b) En déduire $\mathbb{E}(Y|[X = k])$ pour k dans $[\![0\,;\,4]\!]$.

c) En déduire finalement $\mathbb{E}(Y)$.

2. À l'aide du système complet $([X = 0], [X \neq 0])$, justifier que, pour tout k de $[\![1\,;\,4]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{1}{64} + \mathbb{P}(X = k)$.

3. J'annonce 4 cartes rouges. Quelle est la probabilité que je bluffe ? Et si j'annonce 2 cartes rouges ?

Exercice 3.8 *Ne quittez pas ...*

Une secrétaire doit contacter n clients ($n \in \mathbb{N}^*$) par téléphone. Elle tente de les appeler les uns après les autres. Pour chaque client, la probabilité que l'appel téléphonique aboutisse est p ($p \in \,]\,0\,;\,1\,[$) et est indépendante des autres clients. À l'issue des n tentatives, on note X_1 le nombre de clients que la secrétaire a réussi à contacter.

Un peu plus tard, la secrétaire tente à nouveau d'appeler les $n - X_1$ clients non joints lors de la première vague d'appels. On suppose que la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à p et indépendante des autres, et on note X_2 le nombre de clients contactés au cours de cette deuxième vague d'appels.

La secrétaire procède ensuite à une $3^{\text{ème}}$ vague d'appels, puis une $4^{\text{ème}}$,... et ainsi de suite jusqu'à avoir contacté les n clients. On suppose qu'au cours de chacune des ces vagues d'appels, la probabilité d'aboutir de chaque tentative reste égale à p et indépendante des autres.

Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre d'appels ayant abouti au cours de la $k^{\text{ème}}$ vague et $Y_k = X_1 + \cdots + X_k$ le nombre total de clients contactés à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ vague.

1. Donner la loi de Y_1 ainsi que son espérance.

2. a) Soit k un entier de $[\![0\,;\,n]\!]$. Quelle est la loi de X_2 conditionnée par l'événement $[Y_1 = k]$? En déduire $E(X_2|Y_1 = k)$.

b) Montrer alors que $E(Y_2) = np(2 - p)$.

3. a) Soit k un entier de $[\![0\,;\,n]\!]$. Quelle est la loi de X_3 conditionnée par l'événement $[Y_2 = k]$? En déduire $E(X_3|Y_2 = k)$.

b) Montrer alors que $E(Y_3) = np(3 - 3p + p^2)$.

4. a) On pose $u_0 = 0$, et, pour tout m de $\mathbb{N}$, $u_m = E(Y_m)$. En utilisant $E(X_{m+1}|Y_m = k)$, montrer que, pour tout m de $\mathbb{N}$, $u_{m+1} = (1 - p)u_m + np$.

b) En remarquant que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique, calculer u_m en fonction de n, p et m et en déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} E(Y_m)$.

c) On suppose $p = 1/2$. Calculer le nombre minimum de vagues d'appels nécessaires pour espérer joindre au moins 90% des clients.