EXERCICE 1

1. (a) D'après le cours, lorsque x tend vers 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

(b)

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

(c) La série de terme général $-\dfrac{1}{2n^2}$ est à termes négatifs et convergente (série de Riemann). Par équivalence de séries à termes généraux de signe constant, il vient que la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, autrement dit (somme télescopique), $w_n - w_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, autrement dit la suite (w_n) converge.

2. La fonction φ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ (par quotient de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle, la fonction $t \mapsto t$ ne s'annulant pas sur l'intervalle en question).
Sa dérivée est donnée par : $\forall t \in]0,+\infty[,\ \varphi'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$. On en déduit les variations de φ (les limites étant $-\infty$ en 0^+ par quotient, et 0 en $+\infty$ par croissances comparées) :

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3. (a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leqslant 0 \text{ car } \varphi \text{ est décroissante sur }]2n+1; 2n+2[$$

Donc la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
De la même manière :

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \geqslant 0 \text{ car } \varphi \text{ est décroissante sur }]2n+2; 2n+3[$$

Et donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ est croissante.
D'autre part :

$$S_{2n} - S_{2n+1} = -u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc les deux suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

(b) Les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite réelle L. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe donc $N_1 \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N_1, |S_{2n} - L| \leqslant \varepsilon$ et il existe $N_2 \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant N_2, |S_{2n+1} - L| \leqslant \varepsilon$, donc $\forall n \geqslant \max(2N_1, 2N_2+1),\ |S_n - L| \leqslant \varepsilon$.
Cela traduit donc que la suite (S_n) converge vers le réel L également. En d'autres termes, la série de terme général u_n est convergente.
Observant que :

$$\forall n \geqslant 3,\ |u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

il vient, par comparaison à la série harmonique, que $\sum |u_n|$ est divergente et donc que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

4. (a) D'après les variations de φ, pour tout $n \geqslant 3$ φ est décroissante sur $[n; n+1]$ (car $e < 3$). Donc :

$$\forall n \geqslant 3,\ \forall t \in [n; n+1],\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \varphi(t)$$

Et par positivité de l'intégrale $(n < n+1)$, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$$

(b) $\dfrac{\ln(t)}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)$ avec $u(t) = \ln t$, ce qui permet d'intégrer directement :

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln^2 t\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}[\ln^2(n+1) - \ln^2(n)]$$

Mais alors il vient que pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \\ &\leqslant 0 \ \text{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
Selon le même principe que dans la question précédente, la décroissance de φ sur l'intervalle $[n; n+1]$ pour $n \geqslant 3$ montre que :

$$\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n)}{n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\ln^2(n+1) - \ln^2(n)]$$

Donc pour tout $k \geqslant 3$, il vient que :

$$\frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}[\ln^2(k+1) - \ln^2(k)] \geqslant 0$$

En sommant cette inégalité pour k allant de 3 à n il vient que :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln^2(n+1) + \frac{1}{2}\ln^2(3) \geqslant 0$$

Et donc :

$$\begin{aligned} v_n &\geqslant \frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2(n) - \frac{1}{2}\ln^2(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \\ &\geqslant -\frac{1}{2}\ln^2(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est donc minorée, et décroissante, donc convergente.

5. Soit $n \geqslant 1$. Introduisons les deux quantités suivantes :

$$\alpha_n = \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2n} \frac{\ln(2p)}{2p} \quad \text{et} \quad \beta_n = \sum_{1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2n} \frac{\ln(2p+1)}{2p+1}$$

On a alors $S_{2n} = \alpha_n - \beta_n$. Et d'autre part : $\alpha_n + \beta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \alpha_n - \beta_n \\ &= \alpha_n - \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \alpha_n \Big) \\ &= 2\alpha_n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \sum_{1 \leqslant 2p \leqslant 2n} \frac{\ln(2p)}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \end{aligned}$$

A l'aide de cette dernière formule, on calcule :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \Big(v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \Big) - \Big(v_{2n} + \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \Big) \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(2) + \ln(n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{\ln^2(2) + \ln^2(n) + 2\ln(2)\ln(n)}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2} - \ln(2)\ln(n) \end{aligned}$$

6. La formule obtenue à la question précédente donne :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} = \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

La suite (v_n) étant convergente, par unicité de la limite, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, il vient alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \gamma \ln(2) - \dfrac{\ln^2(2)}{2}$. De plus, la suite (S_n) étant convergente, par unicité de la limite, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

EXERCICE 2

1. (a) Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P+Q) = 4X(\lambda P+Q)'(X)-(\lambda P+Q)''(X) = \lambda 4XP'(X)+4XQ'(X)-\lambda P''(X)-Q''(X) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

L'application φ est donc linéaire.
De plus, si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, alors P est de degré inférieur ou égal à n.
Alors $\deg(P') \leqslant n-1$ et donc $\deg(XP'(X)) \leqslant n$, et on a $\deg(P'') \leqslant n-2$. Ainsi $\varphi(P)$ est une combinaison linéaire de deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n, donc il est lui-même élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donc φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 4X$, et pour tout $k \in [\![2, n]\!], \varphi(X^k) = 4kX^k - k(k-1)X^{k-2}$. On en déduit l'écriture de la matrice associée à φ dans la base canonique:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
 & 4 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & 8 & \ddots & -k(k-1) & \ddots & \vdots \\
 & & & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & 4k & \ddots & -n(n-1) \\
 & (0) & & & & \ddots & 0 \\
 & & & & & & 4n
\end{pmatrix}$$

(c) Le polynôme $3X - 4X^3$ n'est pas le polynôme nul et on a :

$$\varphi(3X-4X^3) \quad = \quad 4X(3-12X^2)-(-24X) = 36X-48X^3 = 12(3X-4X^3)$$

Donc $3X - 4X^3$ est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre 12.

(d) La matrice de φ est triangulaire supérieure. On lit donc ses valeurs propres directement sur sa diagonale : on a donc $Sp(\varphi) = \{0, 4, 8, \ldots, 4n\} = \{4k,\ k \in [\![0, n]\!]\}$. L'endomorphisme φ admettant ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes, étant un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, l'application φ est bien diagonalisable et chacun de ses espaces propres est de dimension 1.

(a) Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto y - x$ sont polynomiales, donc admettent bien des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$. La fonction $(x, y) \mapsto y - x$ étant à valeurs dans $]0, +\infty[$ sur $\mathcal{D}_2$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, par composition la fonction $(x, y) \mapsto \ln(y - x)$ admet bien également des dérivées paretielles premières et secondes sur fonction $\mathcal{D}_2$, par somme f en admet aussi. On obtient que pour tout (x, y) de $\mathcal{D}_2$:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + \frac{1}{y-x} \qquad \partial_2 f(x,y) = 2y - \frac{1}{y-x}$$

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2} \qquad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2} \qquad \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2}$$

(b) Soit (x, y) un point de $\mathcal{D}_2$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 f(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 f(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x + \frac{1}{y-x} & = & 0 \\ 2y - \frac{1}{y-x} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2x - \frac{1}{2x} & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4x^2 & = & 1 \\ y & = & -x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{2} \\ y & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

(l'autre solution du système, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, a été écartée car elle n'est pas dans $\mathcal{D}_2$).

Donc f admet un unique point critique, le point $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ étant de taille 2 elle admet deux valeurs propres au maximum.
Comme $A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles (car de rang 1), on en déduit que 2 et 4 sont des valeurs propres de A et ce sont les seules possibles : $Sp(A) = \{2, 4\}$.
La matrice hessienne de f au point critique $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ est donc : $\nabla^2(f)(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$.
On vient de voir que cette matrice admet deux valeurs propres strictement positives, donc la fonction f admet un minimum local en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

3. (a) Lorsqu'on dérive par rapport à la k-ième variable, on peut oublier tous les termes dans les sommes qui ne dépendent pas de x_k.
Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \partial_k g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec :

$$g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < k} \ln(x_k - x_i) - \sum_{k < j \leqslant n} \ln(x_j - x_k)$$

On obtient donc : $\partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 2x_k - \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < k} \frac{1}{x_k - x_i} - \sum_{k < j \leqslant n} \left(-\frac{1}{x_j - x_k}\right) = 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}$.

(b) Par définition d'un point critique :

$$u \text{ est un point critique} \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ \partial_k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

(c) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $S(X) = (X - x_k)Q_k(X)$.
En dérivant cette relation on obtient : $S'(X) = (X - x_k)Q_k'(X) + Q_k(X)$.
Et en évaluant cette relation en x_k, il vient que : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$.
En dérivant encore une fois, on obtient : $S''(X) = (X - x_k)Q_k''(X) + 2Q_k'(X)$.
En évaluant cette dernière relation en x_k, il vient que : $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

(d) A partir de la définition de $Q_k(X)$, on sait que : $Q_k(x) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)$. On obtient ainsi la dérivée de Q_k :

$$Q_k'(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, i}}^{n} (x - x_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{Q_k(x)}{x - x_i} = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) On calcule à l'aide des questions précédentes pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 2Q'(x_k) - 4x_k Q_k(x_k) = -2Q_k(x_k)\Big(2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}\Big)$$

Puisque $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, on a que $Q_k(x_k) \neq 0$. La condition pour que u soit un point critique devient donc :

$$\begin{aligned} u \text{ est un point critique} &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
u \text{ est un point critique} &\iff \forall k \in [\![1,n]\!], x_k \text{ est racine de } S''(X) - 4XS'(X) \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \,|\, S''(X) - 4XS'(X) = Q(X)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k) \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \,|\, S''(X) - 4XS'(X) = S(X)Q(X) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,|\, S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X) \\
&\qquad (\text{car } S(X) \text{ et } S''(X) - 4XS'(X) \text{ sont de même degré !})
\end{aligned}$$

Le polynôme $S(X)$ est de degré n et son coefficient dominant vaut 1.
Donc $S''(X) - 4XS'(X)$ est aussi de degré n, et son coefficient dominant est $-4n$.
Donc pour que $S''(X) - 4XS'(X)$ et $\lambda S(X)$ soient égaux, il faut en particulier qu'ils aient même coefficient dominant, et donc que $\lambda = -4n$.
Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,|\, S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X) \Longrightarrow S''(X) - 4XS'(X) = -4nS(X)$.
Et la réciproque est évidente.
Donc au final :

$$u \text{ est un point critique} \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) Si u est un point critique, alors le polynôme $S(X)$ est vecteur propre de φ associé à la valeur propre $4n$. De plus, le coefficient dominant de $S(X)$ vaut 1.
Or on sait que les espaces propres de φ sont tous de dimension 1, et donc en particulier l'espace propre associé à $4n$ est de dimension 1. Tous les polynômes de cet espace propre sont donc colinéaires, et donc il y en a un seul qui est de coefficient dominant 1.
Donc le polynôme $S(X)$ (s'il existe ...) est unique, et donc f admet au plus un point critique.

(b) On a vu que le polynôme $3X - 4X^3$ est vecteur propre de φ, associé à la valeur propre 12.
Donc le polynôme $X^3 - \frac{3}{4}X$ est lui aussi vecteur propre de φ, associé à la valeur propre $12 = 4n$.
Or $X^3 - \dfrac{3}{4}X = X(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2})(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2})$.
D'après la question 3, il vient que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$, le point $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

1. (a) Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a : $I_{a,0} = \displaystyle\int_0^1 x^a \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}$.

(b) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I_{a,b} = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}(1-x)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{a+1}}{a+1}(-b)(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = 0 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$$

(c) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
I_{a,b} &= \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1} = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2}I_{a+2,b-2} = \cdots = \frac{b}{a+1} \times \frac{b-1}{a+2} \times \frac{b-2}{a+3} \times \cdots \times \frac{1}{a+b}I_{a+b,0} \\
&= \frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}I_{a+b,0} = \frac{a! \times b!}{(a+b)!} \times \frac{1}{a+b+1} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}
\end{aligned}$$

(d) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$:

- la fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 0 et en 1 (si $a=0$ ou $b=0$),
- la fonction $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$,
- Enfin,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}x^a(1-x)^b\mathrm{d}x = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\times I_{a,b} = 1.$$

Donc $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

2. (a) La variable X étant bornée, X admet nécessairement un moment de tout ordre. En particulier X admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}x^{a+1}(1-x)^b\mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\times\frac{(a+1)!\times b!}{(a+b+2)!} = \frac{a+1}{a+b+2} \end{aligned}$$

(b) Comme vu à la question précédente, X admet un moment d'ordre 2 (car X bornée), donc X admet une variance. De plus,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}x^{a+2}(1-x)^b\mathrm{d}x \\ &= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}I_{a+2,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\times\frac{(a+2)!\times b!}{(a+b+3)!} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)} \end{aligned}$$

D'où on tire que :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)} - \left(\frac{a+1}{a+b+2}\right)^2 \\ &= \frac{a+1}{(a+b+2)^2(a+b+3)}\Big[(a+2)(a+b+2)-(a+1)(a+b+3)\Big] \\ &= \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+2)^2(a+b+3)} \end{aligned}$$

(c) Notons F_X la fonction de répartition de X.
Puisque la densité de X est nulle en dehors de l'intervalle $[0;1]$, on a immédiatement que :

- $\forall x<0,\ F_X(x)=0$.
- $\forall x \geqslant 1,\ F_X(x)=1$.

La fonction F est continue et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ (sur cet intervalle, c'est un polynôme).

Calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{(a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{(k-1)!(a+b+1-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{(a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\sum_{k=a}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} \Big] \\
&= (a+b+1)! \Big[\frac{x^a(1-x)^b}{a! \times b!} \Big] = f_{a,b}(x)
\end{aligned}$$

De plus on a $F(0) = 0$, donc $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f_{a,b}(t)\mathrm{d}t = F_X(x)$.
On a donc que pour tout réel x, $F_X(x) = F(x)$. En d'autres termes, F est bien la fonction de répartition de X.

Partie B

3. Chacun des n tirages effectués est susceptible de donner une boule rouge ou blanche. Donc $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

4. (a)
```
function res = tirage(x,y)
    r = rand()
    if r<x/(x+y) then
        res = 0
    else
        res = 1
    end
endfunction
```

(b)
```
function Xn = experience(a,b,n)
    x = a
    y = b
    for k=1:n
        r = tirage(x,y)
        if r==0 then
            x = x + 1
        else
            y = y + 1
        end
    end
    Xn = x - a
endfunction
```

(c)
```
function loi=simulation(a,b,n,m)
    loi = zeros(1,n+1)
    for k = 1:m
        Xn = experience(a,b,n)
        loi(Xn+1) = loi(Xn+1) + 1/m
    end
endfunction
```

5. (a) Les résultats obtenus laissent penser que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

(b) Puisque l'urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche, la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage est $1/2$. On a donc $P(X_1 = 1) = 1/2$ et $P(X_1 = 0) = 1/2$.
X_1 suit dont la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ (qui est aussi incidemment la loi uniforme sur $[\![0, 1]\!]$).

(c) Si $[X_n = k]$ est réalisé, alors l'urne contient avant le $n+1$-ième tirage $k+1$ boules rouges et $n-k+1$ boules blanches. Alors X_{n+1} vaudra k ou $k+1$ selon que l'on pioche au $(n+1)$-ième tirage une boule blanche ou une boule rouge. Donc :

$$\begin{array}{rcl} P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k) & = & \dfrac{n-k+1}{n+2} \\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1) & = & \dfrac{k+1}{n+2} \\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) & = & 0 \text{ pour } \ell \notin \{k,k+1\} \end{array}$$

(d) Montrons donc par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
La question (b) montre que la propriété est vraie pour $n=1$.
Supposons que pour un certain n$\in \mathbb{N}^*$ on a X_n qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1}=k) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=i) \text{ (formule des probabilités totales)} \\ & = & P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=k-1)+P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\times P(X_n=k) \\ & = & \dfrac{k}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n-k+1}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n+2} \end{array}$$

Il reste à calculer $P(X_{n+1}=0)$ et $P(X_{n+1}=n+1)$:

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1}=0) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=i) \\ & = & P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)\times P(X_n=0) \\ & = & \dfrac{n+1}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n+2} \\ P(X_{n+1}=n+1) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=n+1)\times P(X_n=i) \\ & = & P_{[X_n=n]}(X_{n+1}=n+1)\times P(X_n=n) \\ & = & \dfrac{n+1}{n+2}\times\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n+2} \end{array}$$

D'après le principe de récurrence, il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a X_n qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

6. (a)

$$\begin{array}{rl} & P(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}\cap\overline{R_{k+2}}\cap\cdots\cap\overline{R_n}) \\ = & P(R_1)\times P_{R_1}(R_2)\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}}) \\ & \times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{k+1}}}(\overline{R_{k+2}})\times\cdots\times P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k\cap\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) \\ = & \dfrac{a}{a+b}\times\dfrac{a+1}{a+b+1}\times\cdots\times\dfrac{a+k-1}{a+b+k-1}\times\dfrac{b}{a+b+k}\times\dfrac{b+1}{a+b+k+1}\times\cdots\times\dfrac{b+n-k-1}{a+b+n-1} \\ = & \dfrac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!} \end{array}$$

(b) Il y a $\binom{n}{k}$ successions de tirages différentes qui réalisent l'événement $[X_n=k]$ (selon le choix des k tirages qui vont produire une boule rouge parmi les n). Chacune de ces successions de tirages ressemble à celle dont on a calculé la probabilité à la question précédente, à l'ordre près.

La probabilité de chacune de ces successions de tirages va être la même que celle qui a été calculée à la question précédente : le dénominateur sera exactement le même, et le numérateur comportera exactement les mêmes facteurs, mais dans un ordre différent.

Donc $P(X_n = k) = \binom{n}{k}\dfrac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$.

(c)

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}\\
&= \frac{n!(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{k!(n-k)!(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}\\
&= \frac{n!(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}\times\frac{(a+k-1)!}{k!(a-1)!}\times\frac{(b+n-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!}\\
&= \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
E(a+X_n) &= \sum_{k=0}^{n}(a+k)P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(a+k)\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{a\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\\
&= \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}\\
&= \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\binom{a+b+n}{a+b}\\
&\qquad \text{(du fait de } \textstyle\sum P(X_n=k)=1 \text{ avec } a+1 \text{ boules rouges et } b \text{ blanches)}\\
&= \frac{a(a+b+n)}{a+b}
\end{aligned}$$

Et alors il vient que : $E(X_n) = E(a+X_n) - a = \dfrac{a(a+b+n)}{a+b} - a = \dfrac{an}{a+b}$.

Partie C

7. (a) Puisque X_n prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$, $Y_n \in [0,1]$.
   Donc si $x < 0$, $F_n(x) = 0$.

   (b) Pour la même raison, si $x \geqslant 1$ alors $F_n(x) = 1$.

8. (a) $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(X_n \leqslant nx) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$ (car X_n ne prend que des valeurs **entières**).

   (b)

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} \\
&= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}
\end{aligned}
$$

(Grâce à la formule admise, appliquée à $p = a + \lfloor nx \rfloor$ qui est bien dans $[\![a, a+b+n-1]\!]$ puisque $\lfloor nx \rfloor \leqslant n$ et $b \geqslant 1$)

(c) On obtient que :

$$
\begin{aligned}
\binom{m}{j} &= \frac{m!}{j!(m-j)!} \\
&= \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!} \\
&\underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}
\end{aligned}
$$

(car chaque terme du produit au numérateur est équivalent à m)

(d) Remarquons tout d'abord que puisque $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$, on a $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.
De même, on a $n(1-x) \leqslant n - \lfloor nx \rfloor < n(1-x) + 1$ et donc $n - \lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n(1-x)$.
Et donc en particulier ces deux quantités tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ (car $x \in]0,1[$).
Alors on a :

$$
\begin{aligned}
\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(nx)^i}{i!} \\
\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{[n(1-x)]^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!} \\
\binom{a+b+n-1}{a+b-1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}
\end{aligned}
$$

Et donc par produit d'équivalents pour tout $i \in [\![a; a+b-1]\!]$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^i x^i n^{a+b-1-i}(1-x)^{a+b-1-i}(a+b-1)!}{i!(a+b-1-i)!n^{a+b-1}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}
\end{aligned}
$$

Et donc, en sommant ces limites pour i allant de a à $a+b-1$, on obtient que :

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}$$

9.

$$F_n(0) = P(Y_n \leqslant 0) = P(X_n \leqslant 0) = P(X_n = 0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{n^{b-1}}{(b-1)!}}{\frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$$

10. Lorsque $n \to +\infty$, F_n tend vers la fonction de répartition de la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$. Donc la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$.

11.

$$E(Y_n) \quad = \quad E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{a}{a+b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{a+b}$$

Cette limite est justement l'espérance de la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$, ce qui n'est pas étonnant puisque (Y_n) tend en loi vers la oi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$.
Mais on ne pouvait pas en être sûr avant d'avoir fait le calcul, car la convergence en loi n'implique pas *a priori* la convergence des espérances.