Corrigé 2016

Exercice 1 ....

1) a) • La fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^1 en tant que quotient (bien défini) de fonctions de classe C^1.

Pour tout *x* de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{e^{-x}(1+x)}{x^2}$.

Comme e^{-x} est strictement positif pour tout *x*, et comme *x* et $(1+x)$ sont aussi strictement positifs (car *x* est dans $\mathbb{R}_+^*$), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) < 0$.

Ceci prouve que *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

b) Par récurrence.

• Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini (par l'énoncé) et il vaut 1 donc il est strictement positif.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel *n* fixé, que u_n est bien défini et que $u_n > 0$, alors on peut appliquer la fonction *f* à u_n, ce qui définit correctement u_{n+1}, et comme de plus, *f* arrive dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.

• Conclusion :

$$\boxed{\text{Chaque terme de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est parfaitement défini et strictement positif}}$$

2) En lisant le script de gauche, on constate que $u_5 \leq 0,00001$, mais en lisant celui de droite, on constate cette fois que $u_6 \geq 100\,000$.

On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, et plus hardiment, que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty}$$

3) a) La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a, pour tout x positif :

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x = -\left(e^{-x} + 2x\right)$$

Comme $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, il est évident que : $g'(x) < 0$. Par conséquent :

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$$

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

On a $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. De plus, g est continue (elle est même de classe C^1) sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left]-\infty, 1\right]$. Comme 0 appartient à $\left]-\infty, 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}_+$, et même dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $g(0) \neq 0$).
Comme $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, on déduit de tout ceci :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ possède une seule solution dans } \mathbb{R}_+^*}$$

c) Comme on note α la solution de l'équation $f(x) = x$, on a $f(\alpha) = \alpha$.
On a $g(1) = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$ et $g(\alpha) = 0$ donc $g(\alpha) > g(1)$, comme g décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\alpha < 1$.
Comme $\alpha < 1$, en appliquant la fonction f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $f(\alpha) > f(1)$, ce qui s'écrit : $\alpha > \dfrac{1}{e}$.
Bilan :

$$\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$$

4) a) On a $u_0 = 1$ donc :
$u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{1}{e}$ et $u_2 = f(u_1) = f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e \times \exp\left(-\dfrac{1}{e}\right) = e^{1-\frac{1}{e}}$
Comme $1 - \dfrac{1}{e} > 0$, on obtient $u_2 > 1$, d'où : $u_2 > u_0$.
Ayant $u_2 > u_0$, en appliquant f décroissante, on a $f(u_2) < f(u_0)$, soit $u_3 < u_1$.
Conclusion :

$$\boxed{u_2 > u_0 \text{ et } u_3 < u_1}$$

b) On montre que $u_{2n+2} > u_{2n}$ par récurrence.

• Pour $n = 0$, on sait que $u_2 > u_0$ donc la proposition est vraie à l'ordre 0.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que $u_{2n+2} > u_{2n}$, alors on peut appliquer la fonction *f* décroissante, ce qui donne $f\left(u_{2n+2}\right) < f\left(u_{2n}\right)$, c'est-à-dire : $u_{2n+3} < u_{2n+1}$. En appliquant *f* une fois de plus, on trouve : $u_{2n+4} > u_{2n+2}$.

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} > u_{2n}$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

En appliquant *f* à l'inégalité $u_{2n+2} > u_{2n}$, on trouve (par décroissance de f) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

5) a) Pour tout *x* strictement positif, on a :

$$h(x) = (f \circ f)(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{x}{e^{-x}} e^{-f(x)} = x\exp\left(x - f(x)\right) = x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

On a vu que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x - f(x)\right) = -\infty$.

On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(x - f(x)\right) = 0$, ce qui donne : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$.

Conclusion :

$$\boxed{h \text{ est continue en } 0}$$

b) On a déjà $h(0) = 0$ donc 0 est une solution de l'équation $h(x) = x$.

Pour *x* strictement positif, on a les équivalences suivantes :

$h(x) = x \Leftrightarrow x\exp\left(x - f(x)\right) = x \Leftrightarrow x\left(1 - \exp\left(x - f(x)\right)\right) = 0$.

$h(x) = x \Leftrightarrow \exp\left(x - f(x)\right) = 1 \Leftrightarrow x - f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$

La dernière égalité provient de la question 3b).

Finalement :

$$\boxed{h(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \alpha}$$

c) La suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 (car tous les termes de la suite sont positifs) donc elle est convergente. En notant ℓ sa limite, comme on a $u_{2n+3} = (f \circ f)\left(u_{2n+1}\right) = h\left(u_{2n+1}\right)$ et comme *h* est continue sur $\mathbb{R}_+$, ℓ est un point fixe de *h*, donc : $h(\ell) = \ell$.

D'après la question 5b), on a deux options : $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Comme $u_1 = \frac{1}{e}$ et comme $u_{2n+1} < u_1$ (la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante), on en déduit : $u_{2n+1} < \frac{1}{e}$. En passant à la limite, on obtient : $\ell \leq \frac{1}{e}$.

Ceci rend l'option $\ell = \alpha$ impossible puisque l'on a vu que $\alpha > \frac{1}{e}$ donc il ne reste que l'option : $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0}$$

d) La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la question 2) laisse entendre que sa limite est $+\infty$. On raisonne par l'absurde en supposant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ. Comme on a $u_{2n+2} = (f\circ f)(u_{2n}) = h(u_{2n})$ et comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, on sait, ici aussi, que : $h(\ell) = \ell$.
D'après la question 5b), on a $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
Comme $u_{2n} \geq u_0$ (la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante), on a, par passage à la limite $\ell \geq u_0$, soit encore : $\ell \geq 1$.
Pour finir, on sait que $\alpha < 1$ donc les deux valeurs possibles de ℓ (qui sont 0 et α) ne sont pas acceptables, ce qui prouve que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, et comme elle est croissante, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty}$$

Exercice 2..

1) a) Comme Id et f commutent, on a, en développant :

$$(f - Id)^2 + f\circ(2Id - f) = f^2 - 2f + Id + 2f - f^2$$

Après simplification, il reste :

$$\boxed{(f - Id)^2 + f\circ(2Id - f) = Id}$$

b) En appliquant cette égalité à un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^n$, on obtient :

$$Id(x) = \left((f - Id)^2 + f\circ(2Id - f)\right)(x)$$

Par définition de l'addition des applications, on en déduit :

$$\boxed{x = (f - Id)^2(x) + \left(f\circ(2Id - f)\right)(x)}$$

c) • On a $f\left((f - Id)^2(x)\right) = \left(f\circ(f - Id)^2\right)(x)$, or on sait par hypothèse que $f\circ(f - Id)^2 = 0$ donc : $f\left((f - Id)^2(x)\right) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On a donc déjà :

$$\boxed{(f-Id)^2(x)\in \mathrm{Ker}(f)}$$

- On a aussi $\left(f\circ(2Id-f)\right)(x)=f\left((2Id-f)(x)\right)$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\left(f\circ(2Id-f)\right)(x)\in \mathrm{Im}(f)}$$

Les deux résultats précédents montrent que : $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$.
Comme $\dim \mathrm{Ker}(f)+\dim \mathrm{Im}(f)=\dim \mathbb{R}^n$, on peut conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus \mathrm{Im}(f)}$$

Remarque. On pouvait, à la place de la formule du rang, montrer que $\mathrm{Ker}(f)\cap \mathrm{Im}(f)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, mais c'était plus long.

2) a) En développant, on a :

$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4)-1=\frac{1}{4}(X^2-5X+4))-1=\frac{1}{4}X^2-\frac{5}{4}X=X\left(\frac{1}{4}X-\frac{5}{4}\right)$$

On peut donc écrire : $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\left(-\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}\right)=1$

En posant $P(X)=-\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}$, on a bien :

$$\boxed{\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X\,P(X)=1}$$

b) En remplaçant X par f, cette relation devient :

$$\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)+f\circ P(f)=Id$$

En appliquant à x, on obtient :

$$Id(x)=\left(\frac{1}{4}(f-Id)\circ(f-4Id)+f\circ P(f)\right)(x)$$

Toujours par définition de l'addition des applications, on a :

$$x=\frac{1}{4}\left((f-Id)\circ(f-4Id)\right)(x)+\left(f\circ P(f)\right)(x)$$

On va maintenant montrer que $\frac{1}{4}\left((f-Id)\circ(f-4Id)\right)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ et que $\left(f\circ P(f)\right)(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$.

On a $f\left(\frac{1}{4}((f-Id)\circ(f-4Id))(x)\right)=\frac{1}{4}\left(f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)\right)(x)=0_{\mathbb{R}^n}$, car $f\circ(f-Id)\circ(f-4Id)=0$.

On a donc bien montré que :

$$\frac{1}{4}\big((f-Id)\circ(f-4Id)\big)(x) \text{ appartient à } \operatorname{Ker}(f)$$

On a aussi $(f\circ P(f))(x)=f\big(P(f)(x)\big)$, ce qui prouve bien que :

$$(f\circ P(f))(x) \text{ appartient à } \operatorname{Im}(f)$$

Les deux résultats précédents montrent que : $\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f)+\operatorname{Im}(f)$

Comme $\dim\operatorname{Ker}(f)+\dim\operatorname{Im}(f)=\dim\mathbb{R}^n$, on peut conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)}$$

3) a) Soit p le degré de P. On sait que P s'annule en 0 donc on peut écrire $P=XQ$, où Q est un polynôme de degré égal à $p-1$. De plus, on sait que P' ne s'annule pas en 0, et comme $P'=XQ'+Q$ alors $P'(0)=0+Q(0)=Q(0)$, ce qui prouve que $Q(0)\neq 0$.

On peut donc écrire $Q=a_1+a_2X+\ldots+a_pX^{p-1}$, avec $a_1\neq 0$. En remplaçant dans l'égalité $P=XQ$, on trouve bien : $P=a_1X+\ldots+a_pX^p$.

b) • Soit y un élément de $\operatorname{Im}(f)$, alors il existe un x de E tel que $y=f(x)$. D'autre part, comme y appartient à $\operatorname{Ker}(f)$, on a $f(y)=0$. De ces deux égalités, on en déduit que $f(f(x))=0$, ce qui s'écrit : $f^2(x)=0$.

• Pour tout entier $k\geq 2$, on a : $f^k(x)=f^{k-2}\big(f^2(x)\big)=f^{k-2}(0)=0$ (cette dernière égalité provenant du fait que f^{k-2} est linéaire).

• Comme de plus, P est annulateur de f, on a : $a_1f+\ldots+a_pf^p=0$.

En appliquant au vecteur x, on obtient : $a_1f(x)+\ldots+a_pf^p(x)=0$, mais pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x)=0$ donc il reste $a_1f(x)=0$. Pour finir, comme $a_1\neq 0$, on en déduit : $f(x)=0$, et comme $y=f(x)$, on obtient : $y=0$.

On vient de montrer que $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)\subset\{0\}$ et comme l'inclusion réciproque est acquise (le vecteur nul appartient à tous les espaces vectoriels), on a finalement : $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=\{0\}$.

La formule du rang assure que $\dim\operatorname{Ker}(f)+\dim\operatorname{Im}(f)=\dim E$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\mathbb{R}^n=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)}$$

c) Les polynômes annulateurs de f dans les deux questions précédentes étaient X^3-2X^2+X et X^3-5X^2+4X qui sont tous les deux des cas particuliers de polynômes vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

Exercice 3 ....

1) On a $L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}$.

Par propriété de la fonction exponentielle et du produit, on en déduit :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_2}}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}.$$

$$L(\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-n/2}\,\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\theta_1^2\right)}.$$

Finalement :

$$\boxed{L(\theta_1,\theta_2)=(2\pi)^{-n/2}\,\theta_2^{-n/2}\,e^{-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)}}$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}>0$, $\theta_2=\sigma>0$ et comme la fonction exponentielle est strictement positive, on peut prendre le logarithme népérien, ce qui donne :

$$\boxed{\ln\left(L(\theta_1,\theta_2)\right)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\theta_2-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)}$$

2) a) La fonction $f=\ln L$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ car $(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln\theta_2$ et $(\theta_1,\theta_2)\mapsto-\frac{1}{2\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ (la première comme composée d'une fonction coordonnée avec la fonction ln et la deuxième comme fraction rationnelle à dénominateur non nul).

b) On cherche le (ou les) point(s) critique(s) :

$$\partial_1(f)(\theta_1,\theta_2)=-\frac{1}{2\theta_2}\left(-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta_1\right)=\frac{1}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1\right).$$

$$\partial_2(f)(\theta_1,\theta_2)=-\frac{n}{2\theta_2}+\frac{1}{2\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)$$

On résout maintenant $\nabla(f)(\theta_1,\theta_2)=0$, ce qui équivaut à :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta_1\right)=0\\[2ex]-\dfrac{n}{2\theta_2}+\dfrac{1}{2\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i+n\theta_1^2\right)=0\end{cases}$$

On trouve alors : $\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \theta_2 = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2\right) \end{cases}$

Comme la première égalité donne $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\theta_1$, on obtient, en remplaçant dans la deuxième : $\theta_2 = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\theta_1^2 + n\theta_1^2\right) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\theta_1^2\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \theta_1^2$.

La fonction *f* a donc un seul point critique $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\boxed{\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } \widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2}$$

c) Les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\partial_{1,1}^2(f)(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{\theta_2}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)(\theta_1, \theta_2) \underset{Schwarz}{=} \partial_{2,1}^2(f)(\theta_1, \theta_2) = -\frac{1}{\theta_2^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_1\right) = \frac{1}{\theta_2^2}\left(n\theta_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(\theta_1, \theta_2) = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n\theta_1^2\right)$$

En le point critique, on obtient :

$$\partial_{1,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \partial_{2,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{1}{\theta_2^2}\left(n\,\widehat{\theta_1} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

$$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\,\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\widehat{\theta_1}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\,\widehat{\theta_1}^2\right)$$

Il faut alors se souvenir que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\,\widehat{\theta_1}$, ce qui permet de simplifier :

$$\partial_{1,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}}.$$

$$\partial_{1,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \partial_{2,1}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = 0.$$

$$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\,\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\widehat{\theta_1}^2\right).$$

Il reste à utiliser l'égalité $\widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2$, soit $n\widehat{\theta_2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\widehat{\theta_1}^2$ pour simplifier la dernière dérivée partielle d'ordre 2 et on obtient :

$\partial_{2,2}^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} - \frac{1}{\widehat{\theta_2}^3} \times n\widehat{\theta_2} = \frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} - \frac{n}{\widehat{\theta_2}^2} = \frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

d) Finalement, la hessienne de *f* en $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ est la matrice :

$$\nabla^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\widehat{\theta_2}} & 0 \\ 0 & \frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, $\frac{-n}{\widehat{\theta_2}}$ et $\frac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$, qui sont tous deux strictement négatifs. La matrice $\nabla^2(f)\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$ est donc définie négative et on peut conclure :

$$\boxed{f \text{ possède un maximum local en } \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)}$$

e) D'après le résultat précédent, il existe un voisinage *V* de $\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$, tel que pour tout (θ_1, θ_2) élément de *V*, on a : $f(\theta_1, \theta_2) \le f\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$. En appliquant la fonction exponentielle qui est croissante, on obtient :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \in V,\ L(\theta_1, \theta_2) \le L\left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{L \text{ admet aussi un maximum local en } \left(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}\right)}$$

3) Par linéarité de l'espérance, on a : $E\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = \frac{1}{n} \times nm = m$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur sans biais de } m}$$

4) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - E\left(\overline{X_n}^2\right)$.

Il reste à déterminer les moments d'ordre 2 de X_i et de $\overline{X_n}$, et comme on connaît leurs variances, on utilise le théorème de Koenig-Huygens ("à l'envers") :

$E\left(X_i^2\right) = V(X_i) + \left(E(X_i)\right)^2 = \sigma^2 + m^2$.

$E\left(\overline{X_n}^2\right)=V\left(\overline{X_n}\right)+\left(E\left(\overline{X_n}\right)\right)^2=\dfrac{\sigma^2}{n}+m^2$.

On remplace dans $E(Z_n)$, ce qui donne :

$$E(Z_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+m^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+m^2\right)=\frac{1}{n}\times n(\sigma^2+m^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+m^2\right).$$

$$E(Z_n)=\sigma^2+m^2-\left(\frac{\sigma^2}{n}+m^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}E(Z_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$, on peut affirmer que :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } \sigma^2}$$

5) a) La loi faible des grands nombres appliquée à la suite de variables (X_i) qui sont indépendantes, qui ont une espérance m et une variance σ^2, garantit que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\overline{X_n}\right) \text{ converge en probabilité vers } m}$$

Comme la fonction "carré" est continue sur $\mathbb{R}$, on est certain que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\overline{X_n}^2\right) \text{ converge en probabilité vers } m^2}$$

b) Il faut montrer la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)\,dx$ qui n'a pas d'autre impropreté qu'en $-\infty$ et $+\infty$ puisque la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$.

On utilise un test de Riemann :

$$x^2\times x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^6\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\underset{\pm\infty}{\sim}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-m)^6\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Or on peut écrire :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-m)^6\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)^6e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]^3e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

En posant $u=\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$, on obtient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2\times x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\dfrac{\left(\sigma\sqrt{2}\right)^6}{\sigma\sqrt{2\pi}}\lim\limits_{u\to+\infty}u^3\,e^{-u}=0$ (par croissances comparées).

Par conséquent, on a : $x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)\underset{\pm\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ est absolument convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2>1$, alors grâce au critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente

De même, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ est aussi absolument convergente, et toujours grâce au critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente.

Comme la fonction $x \mapsto x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)$ est continue sur $[-1,1]$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ existe et ainsi : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi_{m,\sigma^2}(x)dx$ est absolument convergente.

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } 4}$$

Les variables $X_1^2,...,X_n^2$ possèdent une espérance σ^2+m^2, de plus, comme X possède un moment d'ordre 4, les variables $X_1^2,...,X_n^2$ possèdent un moment d'ordre 2, donc une variance.

Pour finir, les variables $X_1^2,...,X_n^2$ sont mutuellement indépendantes car $X_1,...,X_n$ le sont (lemme des coalitions), et on peut appliquer la loi faible des grands nombres qui affirme que :

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) \text{ converge en probabilité vers } \sigma^2+m^2}$$

c) On va montrer que :

$$\left(\,|\,Z_n-\sigma^2\,|\geq \varepsilon\,\right)\subset\left(\left|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(\,|\,\overline{X_n}^{\,2}-m^2\,|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Soit $A=\left(\,|\,Z_n-\sigma^2\,|\geq \varepsilon\,\right)$ et $B=\left(\left|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(\,|\,\overline{X_n}^{\,2}-m^2\,|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)$,

Au lieu de montrer que $A\subset B$, on va montrer (c'est plus pratique) que $\overline{B}\subset\overline{A}$

On a $\overline{B}=\left(\left|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap\left(\,|\,\overline{X_n}^{\,2}-m^2\,|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et si $\overline{B}$ est réalisé, alors on a $\left(\left|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ **et** $\left(\,|\,\overline{X_n}^{\,2}-m^2\,|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$ qui sont réalisés.

De plus, on a :

$$|\,Z_n-\sigma^2\,|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X_n}^{\,2}-\sigma^2\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sigma^2+m^2\right)-\left(\overline{X_n}^{\,2}-m^2\right)\right|$$

On en déduit grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|\,Z_n-\sigma^2\,|\leq\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sigma^2+m^2\right)\right|+\left|\overline{X_n}^{\,2}-m^2\right|$$

Par conséquent, si $\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$ **et** $\left(\left| \overline{X_n}^2 - m^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$ sont réalisés, alors $\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| < \varepsilon \right)$ l'est aussi.

Ceci prouve que $\overline{B} \subset \overline{A}$ et on en déduit que $A \subset B$, c'est-à-dire que, pour tout ε strictement positif, on a :

$$\boxed{\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) \subset \left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \cup \left(\left| \overline{X_n}^2 - m^2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

d) Par croissance de la probabilité et grâce à la formule $P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$, qui est une conséquence de la formule du crible, on obtient :

$$P\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) \leq P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + P\left(\left| \overline{X_n}^2 - m^2 \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

La première probabilité du membre de droite tend vers 0 d'après la question 5b) et la deuxième probabilité du membre de droite tend vers 0 d'après la question 5a), donc, par encadrement (une probabilité est positive) :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| Z_n - \sigma^2 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma^2}$$

Problème ....

Partie 1 : résultats préliminaires

1) En notant $b_{i,j}$ l'élément de la matrice B situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, l'élément de la matrice BA_n situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est : $\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}(n)$. Comme $\lim_{n \to +\infty} a_{k,j}(n) = a_{k,j}$, alors par produit et somme de limites finies, on a : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$, ce qui est l'élément de la matrice BA situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} BA_n = BA}$$

2) Si on fait le produit de A par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, on obtient :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{4}a_{1,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{2,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{3,j}\\\sum_{j=1}^{4}a_{4,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\c\\c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ceci montre que :

$$\boxed{c \text{ est valeur propre de } A}$$

3) Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice D diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
Comme deux matrices semblables ont même trace, on peut conclure que la somme des valeurs propres de A (c'est la trace de D) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov

4) Comme $n \geq 3$, on est sûr que les événements qui conditionnent ne sont pas de probabilité nulle car en effet, on a : $X_1(\Omega)=\{2\}$, $X_2(\Omega)=\{1,2,3\}$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, $X_n(\Omega)=\{0,1,2,3\}$.

• Cherchons $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient zéro boule blanche (c'est-à-dire 3 boules noires) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors après le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y aura une boule blanche à coup sûr dans l'urne U : en effet, lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il y a échange certain d'une boule noire de U avec une boule blanche de V.
Conclusion :

$$\boxed{P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1 \text{ et } P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=3)=0}$$

• Cherchons $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient une boule blanche (c'est-à-dire 2 boules noires) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il y a quatre possibilités lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage :

❶ Soit on pioche la boule blanche de U et une boule blanche de V et dans ce cas il y a toujours une boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

❷ Soit on pioche une boule noire de U et la boule noire de V et dans ce cas il y a toujours une boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

❸ Soit on pioche la boule blanche de U et la boule noire de V et dans ce cas il y a zéro boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

❹ Soit on pioche une boule noire de U et une boule blanche de V et dans ce cas il y a deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Avec ❶ et ❷, par incompatibilité : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Avec ❸ : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{9}$

Avec ❹ : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{4}{9}$

Comme on échange une seule boule, on a bien sûr : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{9},\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{4}{9} \end{array}}$$

• Cherchons $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient deux boules blanches (c'est-à-dire une boule noire) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il y a quatre possibilités lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage :

❶ Soit on pioche la boule noire de U et une boule noire de V et dans ce cas il y a toujours deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

❷ Soit on pioche une boule blanche de U et la boule blanche de V et dans ce cas il y a toujours deux boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

❸ Soit on pioche la boule noire de U et la boule blanche de V et dans ce cas il y a trois boules blanches dans U, événement de probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

❹ Soit on pioche une boule blanche de U et une boule noire de V et dans ce cas il y a une boule blanche dans U, événement de probabilité $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Avec ❶ et ❷, par incompatibilité : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

Avec ❸ : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{9}$

Avec ❹ : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{4}{9}$

Comme on échange une seule boule, on a bien sûr : $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0$.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)=0,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=\dfrac{1}{9} \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=\dfrac{4}{9} \end{array}}$$

• Cherchons $P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=j)$: si l'urne contient trois boules blanches (c'est-à-dire zéro boule noire) avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors il est certain, lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, que l'on échangera l'une des boules blanches de U avec une des boules noires de V, donc :

$$\boxed{P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1 \text{ et } P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=0)=P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=0}$$

5) a) Il suffit d'écrire sous forme matricielle les résultats de la question précédente et on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

On vérifie qu'effectivement M est la matrice donnée à la question 12).

b) Les événements $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, $(X_n=2)$, $(X_n=3)$ sont de probabilités non nulles dès que $n\geq 3$, et la formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $\left(X_n=j\right)_{0\leq j\leq 3}$, s'écrit :

$$\forall i\in [\![0,3]\!],\ P\left(X_{n+1}=i\right)=\sum_{j=0}^{4}P\left(X_n=j\right)P_{(X_n=j)}\left(X_{n+1}=i\right)$$

D'après la question précédente, on connaît toutes les probabilités conditionnelles, il suffit donc de les remplacer (en faisant attention) pour les 4 valeurs possibles de i et on trouve :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{9}P\left(X_n=1\right).$$

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=P\left(X_n=0\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=1\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=2\right)$$

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{4}{9}P\left(X_n=1\right)+\frac{4}{9}P\left(X_n=2\right)+P\left(X_n=3\right)$$

$$P\left(X_{n+1}=3\right)=\frac{1}{9}P\left(X_n=2\right)$$

Pour conclure, tout ceci s'écrit matriciellement :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\1/9\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=1\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}1\\4/9\\4/9\\0\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=2\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\4/9\\4/9\\1\end{pmatrix}.$$

$$P\left(X_{n+1}=3\right)=\left(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1/9\\0\end{pmatrix}.$$

Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,,\ L_{n+1}=L_n\,M}$$

Remarque. L'énoncé ne le demande pas, mais on peut montrer que les 4 égalités obtenues plus haut restent valables pour $n=0$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_1=0\right)=0$, $P\left(X_1=1\right)=0$, $P\left(X_1=2\right)=1$ et $P\left(X_1=3\right)=0$, en accord avec $X_1(\Omega)=\{2\}$.
Elles sont aussi valables pour $n=1$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_2=0\right)=0$, $P\left(X_2=1\right)=\dfrac{4}{9}$ (échange d'une boule blanche de *U* et d'une boule noire de *V*), $P\left(X_2=2\right)=\dfrac{4}{9}$ (échange de 2 boules blanches ou de 2 boules noires), et $P\left(X_2=3\right)=\dfrac{1}{9}$ (échange d'une boule noire de *U* et d'une boule blanche de *V*).
Elles sont aussi valables pour $n=2$ puisqu'elles donnent :
$P\left(X_3=0\right)=0$, $P\left(X_3=1\right)=\dfrac{4}{9}$, $P\left(X_3=2\right)=\dfrac{4}{9}$ et $P\left(X_3=3\right)=\dfrac{1}{9}$, ce qu'il est facile de vérifier en écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements de probabilité non nulle $\left(X_2=j\right)_{1\le j\le 3}$.

c) On procède par récurrence.
- Pour $n=0$, on a $L_0\,M^0=L_0\,I=L_0$.

- Si l'on suppose, pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, que $L_n = L_0 M^n$, alors comme $L_{n+1} = L_n M$, on a en remplaçant : $L_{n+1} = L_0 M^n M = L_0 M^{n+1}$.
- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0 M^n}$$

6) a) Les sommes des éléments de chaque ligne sont toutes égales à 1 donc, d'après la question 2), on sait que :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M}$$

b) Il suffit de faire les calculs :

$$M\,{}^tE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/9 \\ 1/9 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\,{}^tE_1 .$$

$$M\,{}^tE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/9 \\ -3/9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,{}^tE_2$$

${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres $-\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{3}$.

c) Si l'on suppose M est diagonalisable, alors, d'après la question 3), la somme de ses valeurs propres est égale à sa trace. Or la trace de M est égale à $\frac{8}{9}$, et pour l'instant, la somme des trois valeurs propres de M vaut $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{9}$.

Ceci prouve que M possède une quatrième valeur propre, en l'occurrence : $-\frac{1}{3}$.

Ce raisonnement montre que, si M possède une quatrième valeur propre, alors cette valeur propre est $-\frac{1}{3}$, mais rien n'est encore fait !

Vérifions donc que $-\frac{1}{3}$ est effectivement valeur propre de M :

$$M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 7/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 7/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec la transformation $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 4/9 & 7/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Avec la transformation $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Les deux dernières lignes étant égales, cette matrice n'est pas inversible donc $M + \frac{1}{3}I$ n'est pas inversible, ce qui prouve que $-\frac{1}{3}$ est valeur propre de *M*.

Pour conclure, *M* est une matrice d'ordre 4 et elle possède 4 valeurs propres distinctes donc :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$$

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire

7) Comme *M* est diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice *Q* inversible et une matrice *D* diagonale telles que :

$$\boxed{M = QDQ^{-1}}$$

Comme 1 est valeur propre de *M* associée au sous-espace propre engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on peut choisir la première colonne de *M* égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et la première colonne de *D* égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8) Par récurrence, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.

- Pour $n = 0$, $QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = M^0$.
- Si l'on suppose pour un *n* fixé dans $\mathbb{N}$ que $M^n = QD^nQ^{-1}$, alors on a :

$$M^{n+1} = MM^n = \left(QDQ^{-1}\right)\left(QD^nQ^{-1}\right) = QD\left(Q^{-1}Q\right)D^nQ^{-1} = QDI\,D^nQ^{-1} = QD\,D^nQ^{-1}$$

On trouve bien : $M^{n+1} = Q\,D^{n+1}Q^{-1}$.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = QD^nQ^{-1}}$$

La première colonne de D est imposée et on choisit un ordre arbitraire pour les autres, on peut donc prendre $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1/9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$.

On a alors :

$$D^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (-1/9)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & (1/3)^n & 0\\ 0 & 0 & 0 & (-1/3)^n\end{pmatrix}$$

Comme $\left|-\dfrac{1}{9}\right|<1$, $\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ et $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Grâce au résultat admis de la question 1), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n=Q\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1}$ et on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n=Q\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}}$$

9) a) • La première ligne de la matrice $Q^{-1}M$ est :

$$(\ell_1\ \ell_2\ \ell_3\ \ell_4)\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\left(\frac{\ell_2}{9}\ \vdots\ \ell_1+\frac{4\ell_2}{9}+\frac{4\ell_3}{9}\ \vdots\ \frac{4\ell_2}{9}+\frac{4\ell_3}{9}+\ell_4\ \vdots\ \frac{\ell_3}{9}\right)$$

• La première ligne de la matrice DQ^{-1} est :

$$(1\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4\\ \times & \times & \times & \times\\ \times & \times & \times & \times\\ \times & \times & \times & \times\end{pmatrix}=(\ell_1\ \ \ell_2\ \ \ell_3\ \ \ell_4)$$

Comme on a $M=QDQ^{-1}$, alors $Q^{-1}M=DQ^{-1}$ et les deux premières lignes de ces matrices sont égales, ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{9}\ell_2\quad \ell_1+\frac{4}{9}\ell_2+\frac{4}{9}\ell_3\quad \frac{4}{9}\ell_2+\frac{4}{9}\ell_3+\ell_4\quad \frac{1}{9}\ell_3\right)=(\ell_1\quad \ell_2\quad \ell_3\quad \ell_4)$$

On trouve alors : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 - \dfrac{5}{9}\ell_2 + \dfrac{4}{9}\ell_3 = 0 \\ \dfrac{4}{9}\ell_2 - \dfrac{5}{9}\ell_3 + \ell_4 = 0 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$, système équivalent à : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 - 5\ell_1 + 4\ell_4 = 0 \\ 4\ell_1 - 5\ell_4 + \ell_4 = 0 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$.

On en déduit : $\begin{cases} \ell_2 = 9\ell_1 \\ \ell_1 = \ell_4 \\ \ell_1 = \ell_4 \\ \ell_3 = 9\ell_4 \end{cases}$.

Conclusion :

$$\boxed{\ell_1 = \ell_4 \text{ et } \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4}$$

b) On sait que $Q^{-1}Q = I$, ce qui s'écrit (avec le peu que l'on connaisse de ces matrices) :

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit en identifiant les termes en haut à gauche : $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 1$.

En injectant les relations $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$, on obtient : $20\ell_4 = 1$

Finalement :

$$\boxed{\ell_4 = \frac{1}{20}}$$

10) On a $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a maintenant : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q\left(\lim\limits_{n\to+\infty} D^n\right)Q^{-1} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \\ 1 & \times & \times & \times \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}}$$

11) a) • On a $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$.

• Réaliser $(X=0)$, c'est ne tirer que des boules noires donc $(X=0)=N_1\cap N_2\cap N_3$, et avec la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

• Réaliser $(X=1)$, c'est tirer une boule blanche et deux boules noires donc $(X=1)=(B_1\cap N_2\cap N_3)\cap(N_1\cap B_2\cap N_3)\cap(N_1\cap N_2\cap B_3)$, et toujours avec la formule des probabilités composées :

$$P(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$$

• Réaliser $(X=2)$, c'est tirer une boule noire et deux boules blanches donc $(X=2)=(N_1\cap B_2\cap B_3)\cap(B_1\cap N_2\cap B_3)\cap(B_1\cap B_2\cap N_3)$ et on trouve cette fois : $P(X=2)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$.

• Réaliser $(X=3)$, c'est ne tirer que des boules blanches donc $(X=3)=B_1\cap B_2\cap B_3$, et avec la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$$

Pour résumer, la loi de X est donnée par :

$$\boxed{P(X=0)=P(X=3)=\frac{1}{20}\ \text{ et }\ P(X=1)=P(X=2)=\frac{9}{20}}$$

b) Pour vérifier que $\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1, on calcule ${}^tM\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}=\frac{1}{20}{}^tM\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}$, ce qui donne :

$${}^tM\begin{pmatrix}P(X=0)\\P(X=1)\\P(X=2)\\P(X=3)\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}0&1/9&0&0\\1&4/9&4/9&0\\0&4/9&4/9&1\\0&0&1/9&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1\\9\\9\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1

c) Avec la notation de l'énoncé, la loi de X_n est donnée par $L_n = \big(P(X_n=0)\ \ P(X_n=1)\ \ P(X_n=2)\ \ P(X_n=3)\big)$ et il faut se souvenir que, pour tout *n* de $\mathbb{N}$, on a : $L_n = L_0 M^n$.

Comme X_0 est la variable certaine égale à 3 (il y a trois boules blanches dans l'urne *U* avant le premier tirage), on a : $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, d'après le résultat de la question 1), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \left(L_0 M^n\right) = L_0 \lim_{n\to+\infty} M^n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{1}{20} L_0 \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien, en prenant élément par élément :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \frac{1}{20} = P(X=0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \frac{9}{20} = P(X=1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{9}{20} = P(X=2)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 3) = \frac{1}{20} = P(X=3)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n) \text{ converge en loi vers } X}$$

12) En notant $\pi = \begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$, la question 11) a permis de montrer que π est vecteur propre de ${}^tM$, associé à la valeur propre 1, ce qui s'écrit ${}^tM\,\pi = \pi$. En transposant, on trouve alors ${}^t\pi M = {}^t\pi$, ce qui montre que ${}^t\pi$ est un état stable de la chaîne de Markov étudiée. Par conséquent, comme le réel *f* est la fréquence de passage du mobile sur l'état 0, c'est donc, pour n assez grand, une valeur approchée de la probabilité $P(X=0)$, c'est-à-dire que f est proche de $\frac{1}{20}$.