Exercice 1.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G établit une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque G^{-1} est-elle dérivable ?

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on définit $f(x)$ par

$$\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1.$$

2. Montrer que f est effectivement définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est dérivable.

3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet la droite d'équation $y = -x$ pour axe de symétrie.

4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ et tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 2.

Exercice moins guidé...

Dans cet exercice, f désigne une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;1]$ vérifiant $f(0) = 0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\,dt$...

Est-il possible qu'il y ait égalité ? Si oui, pour quelle(s) fonction(s) ?

2. Et avec $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x$ à la place de $\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$?
Étudier là aussi les éventuels cas d'égalité.

Exercice 3.

Exercice de recherche non guidé...

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si la courbe de f admet au moins deux centres de symétries distincts, alors f est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Et si la courbe de f admet au moins trois centres de symétries distincts ?