Exercice 1.

1. • G est la primitive s'annulant en 0 de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$, elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
• Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = e^{x^2} > 0$, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec le point précédent, ceci établit que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R})$.
• Comme : $\forall t \in [0\,;+\infty[, e^{t^2} \geqslant 1$, par croissance de l'intégrale on obtient la minoration : $\forall x \in [0\,;+\infty[, G(x) \geqslant x$. Par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.
• Le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $G(x)$ donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}, G(-x) = \int_0^{-x} e^{t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{x} e^{u^2}\mathrm{d}u = -G(x).$$
Ainsi G est impaire et $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty$. Avec le point précédent, $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{G est une bijection } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Comme G′ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le cours de première année affirme que G^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left(G^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{G'(G^{-1}(y))}$

$$\boxed{G^{-1} \text{ est dérivable.}}$$

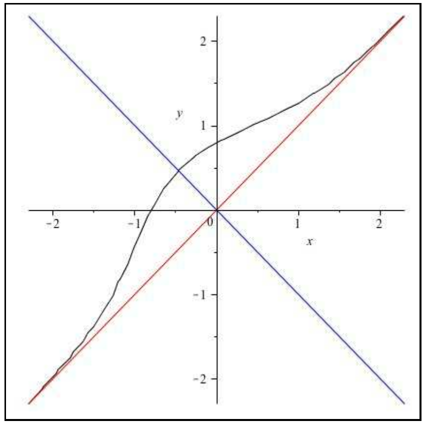
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Observons que : $\forall y \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow G(y)-G(x) = 1 \Leftrightarrow y = G^{-1}\big(1+G(x)\big)$ puisque G est bijective. Ainsi, puisque l'équation définissant $f(x)$ possède une unique solution, $f(x)$ est parfaitement définie. f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a même l'expression :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = G^{-1}\big(1 + G(x)\big) \qquad (\heartsuit).$$
Et comme G et G^{-1} sont dérivables sur $\mathbb{R}$, cette expression montre que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable.}}$$

3. Il convient déjà de réfléchir aux conditions pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f admette la droite Δ d'équation $y = -x$ pour axe de symétrie.
• Si $M = (x, y)$, alors son symétrique par rapport à Δ est $M' = (-y, -x)$.
• Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $M = (x, f(x))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x. Le symétrique M′ de M par rapport à l'axe Δ est $M' = (-f(x), -x)$, et il est aussi sur $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, $-x = f(-f(x))$. On peut ainsi conclure que :
$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à Δ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x$.
• Il reste à s'assurer que f vérifie cette condition. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} f(-f(x)) &= G^{-1}\big(1 + G(-f(x))\big) = G^{-1}\big(1 - G(f(x))\big) \quad (\text{G est impaire.})\\ &= G^{-1}\big(1 - (1 + G(x))\big) \quad (G \circ f = 1 + G \text{ par } (\heartsuit))\\ &= G^{-1}\big(-G(x))\big) = -G^{-1}\big(G(x)\big) = -x \quad (\text{G est impaire !}) \end{aligned}$$
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x$.

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est symétrique par rapport à } \Delta.}$$

4. Soit $x \in [0\,;+\infty[$. De $G(f(x)) = 1 + G(x)$ on tire $G(f(x)) > G(x)$ puis $f(x) > x$ puisque G est strictement croissante. On a alors :
$\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{f(x)} e^{x^2}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $1 \geqslant e^{x^2}(f(x)-x)$ d'où $f(x) \leqslant e^{-x^2}+x$.
$\forall x \in [0\,;+\infty[, 0 \leqslant f(x) - x \leqslant e^{-x^2}$, et en gendarmant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$.
La première bissectrice est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$... et par symétrie par rapport à Δ, elle l'est aussi en $-\infty$!



Exercice 2.

1. Soit $g : [0\,;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$

Il s'agit alors d'établir que $g(1) \geqslant 0$.

Comme f est $\mathcal{C}^1$, g est $\mathcal{C}^2$ (différence de primitives de fonctions $\mathcal{C}^1$). On a :
$$\forall x \in [0\,;1], g'(x) = 2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^3(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\right).$$
Comme $f(0) = 0$ et f est croissante, on a : $\forall x \in [0\,;1], f(x) \geqslant 0$.
On étudie alors sur $[0\,;1]$ $h : x \mapsto 2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$.
$\forall x \in [0\,;1], h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)) \geqslant 0$. Ainsi h est croissante, et comme $h(0) = 0$, h est positive. Ce qui induit la positivité de g', donc la croissance de g, qui elle aussi vérifie $g(0) = 0$. Donc $g(1) \geqslant 0$ ... $\mathcal{CQFD}$!

$$\boxed{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

Analyse du cas d'égalité.

Pour qu'il y ait égalité, il est nécessaire que $g(1) = 0$. Et comme g est croissante et nulle en 0, cela entraîne que g est nulle. Alors g' est nulle, donc le produit fh est nulle. Distinguons deux cas :
• si f est nulle, alors il y a bien cas d'égalité.
• si f n'est pas nulle, comme f est continue et croissante, il existe un réel α tel que f est nulle sur $[0\,;\alpha]$ et strictement positive sur $]\alpha\,;1]$.
Supposons $\alpha > 0$.

Sur l'intervalle $]\,\alpha\,;1\,]$, on a : h est nulle, donc h' aussi, et comme f est non nulle, $1-f'=0$, donc $f'=1$.
Mais sur l'intervalle $[\,0\,;\,\alpha\,]$, f est nulle donc $f'=0$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f'(x)=0\neq 1=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x)$, ce qui contredit la continuité de f' en α.
C'est donc que $\alpha=0$, avec $f'=1$ sur $]\,0\,;1\,]$, et même sur $[\,0\,;1\,]$ par continuité. Comme $f(0)=0$, on en déduit que : $\forall x\in[\,0\,;1\,], f(x)=x$. On vérifie alors sans peine qu'il y a bien égalité pour cette fonction.

Bilan : il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, f est la fonction nulle ou la fonction identité.

2. • *Avec f^4 au lieu de f^3 ...*

Pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ et les conditions $f(0)=0$ et $0\leqslant f'\leqslant 1$ donnent : $0\leqslant f(x)\leqslant x\leqslant 1$, ce qui fait que $f^4(x)\leqslant f^3(x)$ et il vient immédiatement :

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

Le cas d'égalité nécessite le cas d'égalité de la question 1, par conséquent $f=0$ ou $f=id_{[\,0\,;1\,]}$. Mais il n'y a pas égalité dans le cas $f=id_{[\,0\,;1\,]}$ $(1/5<1/4\,!)$.

Seul le cas $f=0$ donne égalité.

• *Avec f^2 au lieu de f^3 ...*

Les arguments précédents montrent que $f^2\geqslant f^3$ et on peut penser que l'inégalité ne tiendra pas ... Prenons par exemple $f=id_{[\,0\,;1\,]}$ et observons :

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}>\frac{1}{4}=\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2\,!$$

L'inégalité ne demeure pas en remplaçant f^3 par f^2.

Complément : Nous aurons l'occasion de démontrer le résultat général suivant :

Inégalité de Cauchy-Schwarz

pour tout fonction f continue sur $[\,0\,;1\,]$, $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t\geqslant\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2$

avec égalité uniquement pour les fonctions constantes.

EXERCICE 3.

Faîtes un petit dessin et observez : il se pourrait que l'écart entre les abscisses des points de symétrie soit une période (peut-être plutôt une demi-période) possible et que la pente entre les deux centres soit la pente de la fonction affine. Précisons les choses.

• *Un premier cas particulier.*

Supposons, pour simplifier les calculs, que la courbe de f admet le centre du repère $\mathrm{O}=(0,0)$ et un point $\mathrm{A}=(a,b)$. On peut alors penser que la candidate fonction affine est $g:x\mapsto\dfrac{b}{a}x$. Soit alors $h=f-g$. Nous avons $f=g+h$ et g affine. Il reste à étudier si h est périodique, auquel cas nous aurons gagné!!!
Comme on pense que $2a$ est un candidat sérieux comme période, tentons notre chance. N'oublions pas que la symétrie par rapport à O induit $f(-x)=-f(x)$ et celle par rapport à A induit $f(a+x)=2b-f(a-x)$.

$$\begin{aligned}h(x+2a)&=f(x+2a)-g(x+2a)=f((x+a)+a)-\frac{b}{a}(x+2a)\\&=2b-f(a-(x+a))-\frac{b}{a}x-2b\\&=-f(-x)-\frac{b}{a}x=f(x)-g(x)=h(x)\end{aligned}$$

f est bien la somme d'une fonction affine (et même linéaire) et d'une fonction périodique.

• *Cas général.*

On suppose que la courbe $\mathcal{C}$ de f admet les points $\mathrm{A}=(a,b)$ et $\mathrm{A}'=(a',b')$ comme centre de symétrie dans le repère $(\mathrm{O},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où nous notons x et y les coordonnées des points. Pour exploiter le premier cas, effectuons une translation et plaçons-nous dans le repère $(\mathrm{A},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, où nous noterons X et Y les coordonnées des points.
Pour tout point $\mathrm{M}=(x,y)_{(o,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$, les coordonnées (X,Y) de M dans le repère $(\mathrm{A},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ sont données par :

$$\begin{cases}\mathrm{X}=x-a\\\mathrm{Y}=y-b\end{cases}.$$

$y=f(x)\Leftrightarrow\mathrm{Y}+b=f(\mathrm{X}+a)\Leftrightarrow\mathrm{Y}=\mathrm{F}(\mathrm{X})$ où je pose $\mathrm{F}:t\mapsto f(t+a)-b$. La courbe de F dans $(\mathrm{A},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est $\mathcal{C}$, et admet le centre A du repère, ainsi que A′, comme centres de symétrie. Par le cas particulier, il existe une fonction linéaire G et une fonction périodique H telles que $\mathrm{F}=\mathrm{G}+\mathrm{H}$. Comme : $\big(\forall t\in\mathrm{R},\mathrm{F}(t)=f(t+a)-b\big)\Leftrightarrow\big(\forall x\in\mathbb{R},f(x)=b+\mathrm{F}(x-a)\big)$, on a alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)=b+\mathrm{G}(x-a)+\mathrm{H}(x-a).$$

Or $x\mapsto b+\mathrm{G}(x-a)$ est affine puisque G est linéaire et $x\mapsto\mathrm{H}(x-a)$ est périodique puisque H l'est.

f est somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique.

Et si la courbe de f admet au moins trois centres de symétries distincts, elle en admet deux A et A′, donc elle est la somme d'une fonction affine et d'une fonction périodique. Du coup, elle admet une infinité de centres de symétrie obtenus par translations successives de vecteurs $\pm\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ de A. Une figure devrait vous rassurer...