

Soit  $p$  un entier naturel au moins égal à 2. Dans ce problème, je vous propose d'étudier les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre  $p$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p-1}).$$

Autrement dit, chaque terme à partir du rang  $p + 1$  est la moyenne des  $p$  termes précédents.

On pose :  $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p-1})\}$ .

### PARTIE I. Un cas connu : $p=2$ .

Dans cette partie, on étudie le cas  $p = 2$ .

1. Déterminer une expression explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire que  $u$  converge, en précisant sa limite en fonction de  $u_1$  et  $u_2$ .

### PARTIE II. Un peu d'analyse pour établir la convergence des suites $u$ de $E$ .

Soit  $u$  une suite de  $E$ .

Pour tout  $n \geq p$ , on pose :

$$m_n = \min(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-p+1}) \text{ et } M_n = \max(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-p+1}).$$

- 1.a) Justifier que les suites  $m$  et  $M$  sont bornées.

- b) En déduire qu'elles sont convergentes.

$$\text{On pose } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \text{ et } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n.$$

- c) Comparer  $\ell$  et  $L$ .

- 2.a) Montrer que, pour tout  $n \geq p + 1$ ,

$$u_n \leq \frac{m_{n-1} + (p-1)M_{n-1}}{p}.$$

- b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = M_{np}$ .

Justifier qu'il existe une application  $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(n) = +\infty \text{ et } v_n = u_{\sigma(n)}.$$

- c) En déduire :

$$L \leq \frac{\ell + (p-1)L}{p}.$$

- d) Montrer finalement que  $\ell = L$ . Comment peut-on qualifier les suites  $m$  et  $M$ ?

3. Déduire des questions précédentes la convergence de  $u$ .

### PARTIE III. Un peu d'algèbre pour déterminer leur limite.

1.  $E$  en tant qu'espace vectoriel.

- a) Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- b) Montrer que

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ u &\mapsto (u_1, u_2, \dots, u_p) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

- c) En déduire la dimension de  $E$ .

On définit, pour tout  $i$  de  $[[1; p]]$ , la suite  $u^{(i)}$  de  $E$  par

$$\forall (i, j) \in [[1; p]], u_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

- d) Montrer que  $(u^{(i)})_{1 \leq i \leq p}$  est une base de  $E$ . On pourra exploiter l'isomorphisme  $\phi$ .

2. La limite comme forme linéaire sur  $E$ .

On pose :

$$\begin{aligned} \Lambda : E &\rightarrow \mathbb{R} & \mathcal{S} : E &\rightarrow E \\ u &\mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n & \text{et} & & u &\mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*} \end{aligned}$$

- a) Justifier que  $\Lambda$  est une forme linéaire sur  $E$ , que  $\mathcal{S}$  un endomorphisme de  $E$ , et que  $\Lambda \circ \mathcal{S} = \Lambda$ .

- b) On note  $\mathbb{1}$  la suite constante égale à 1. S'assurer que  $\mathbb{1}$  est dans  $E$  et donner  $\Lambda(\mathbb{1})$ .

- c) Pour tout  $i$  de  $[[1; p]]$ , on pose :  $\ell_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(i)}$ .

Justifier que  $\sum_{i=1}^p \ell_i = 1$ .

- d) Exprimer  $\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(1)})$  en fonction de  $\mathbb{1}$  et  $u^{(p)}$ , et en déduire  $\ell_1 = \frac{1}{p}\ell_p$ .

- e) Pour  $i$  dans  $[[2; p-1]]$  et exprimer  $\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(i)})$  en fonction de  $\mathbb{1}$ ,  $u^{(i-1)}$  et  $u^{(p)}$ , et en déduire une expression de  $\ell_i$  en fonction de  $\ell_{i-1}$  et  $\ell_p$ .

- f) En déduire, pour tout  $i$  de  $[[1; p]]$ ,  $\ell_i$  en fonction de  $i$  et  $p$ .

3. Synthèse des résultats précédents.

Déterminer, pour toute suite  $u$  de  $E$ ,  $\lim u$  en fonction de ses  $p$  premiers termes.