Comme vous le savez depuis l'an dernier, la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Je vous propose de calculer sa somme dans le cas particulier $\alpha = 2$. Historiquement, c'est le mathématicien suisse Leonhard EULER (1707-1783) qui trouva le premier cette valeur. La démonstration que je vous propose est une démonstration récente (1973) et élémentaire (1) due au mathématicien grec Ioannis PAPADIMITRIOU.

✮✩✮✩✮

Dans cet exercice, on note cot la fonction *cotangente*, définie sur $]\,0\,;\,\pi\,[$, par $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$.

1. Soit n un entier naturel impair, et p tel que $n = 2p+1$.

a) En calculant $(\cos x + i \sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme, montrer qu'il existe un polynôme P_n, dont on déterminera les coefficients, tel que :

$$\forall x \in\,]\,0\,;\,\pi\,[, \quad \sin(nx) = \sin^n(x)\mathrm{P}_n\big(\cot^2(x)\big).$$

b) Déterminer les racines de P_n.

c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ en fonction de p.

2. Justifier élégamment l'encadrement

$$\forall x \in [\,0\,;\,\pi/2\,[, \quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

3.a) Déduire des questions précédentes un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}$.

b) Établir finalement l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. *Cette question sort de l'objectif fixé initialement* – Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de comparaisons séries/intégrales, donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$ et donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ (pour n tendant vers $+\infty$) lorsque $\alpha \leqslant 1$.

(1). J'entends par élémentaire « ne faisant appel qu'à des notions maîtrisées en fin de première année.»