1. **a)** Comme $p = n$ et A est de rang p, A est inversible et le système $(\mathcal{S})$ est de Cramer, donc admet une unique solution $X = A^{-1}B$. De plus, ${}^tA$ est inversible (car ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI = I$). Alors : $AX = B \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAB$, la réciproque est assurée par l'existence de $({}^tA)^{-1}$.

$\boxed{\text{Les systèmes } (\mathcal{S}) \text{ et } (\mathcal{T}) \text{ sont équivalents et admettent une unique solution.}}$

b) $AX = B \Leftrightarrow ||AX - B|| = 0$, qui est forcément le minimum.
Donc X est une solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si X est une pseudo-solution de $(\mathcal{S})$... qui du coup est unique puisque de Cramer.

$\boxed{\text{Cette solution est aussi l'unique solution pseudo-solution de } (\mathcal{S}).}$

2. **a)** On se souvient que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$.
Comme $\mathrm{rg}(A) = p$, nécessairement

$$\boxed{n \geqslant p.}$$

b) • $AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0$ (sans souci).
• ${}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^tX\,{}^tAAX = 0 \Rightarrow {}^t(AX)AX = 0 \Rightarrow ||AX||^2 = 0 \Rightarrow AX = 0$

$\boxed{AX = 0 \text{ si, et seulement si, } {}^tAAX = 0.}$

c) Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
La formule du rang donne $\dim \mathrm{Ker}(f) = p - \mathrm{rg}(f) = 0$, d'où $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
Donc : $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$, et par conséquent ${}^tAAX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.
Soit alors $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ l'application linéaire canoniquement associée à ${}^tAA$.
La formule du rang donne $\mathrm{rg}(g) = p - \dim \mathrm{Ker}(g) = p$, d'où

$\boxed{{}^tAA \text{ est de rang } p, \text{ donc inversible.}}$

Remarque : on peut invoquer une « formule du rang matricielle ».
Si : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *alors* $p = \dim Ker(A) + rg(A)$.

$\boxed{\text{Le système } (\mathcal{T}) \text{ est de Cramer, et admet un unique solution.}}$

3. On note $(C_1, \dots, C_p)$ les p colonnes A et $F = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{Im}(A)$.

a) Il suffit de remarquer que, si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$, alors $AY = y_1C_1 + \cdots + y_pC_p$.
Donc quand Y parcourt $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, AY parcourt F.

$$\boxed{\{AY - B / Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\} = \{C - B / C \in F\}.}$$

b) D'après la propriété de meilleure approximation en norme, $\min\limits_{C \in F} ||C - B||$ existe (et est atteint pour $C = p_F(B)$),

$$\boxed{\min_{Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||AY - B|| = \min_{C \in F} ||C - B|| \text{ existe.}}$$

4. **a)** $(C_1, \dots, C_p)$ étant une famille génératrice de F,
$$Z \in F^\perp \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1\,;p]\!],\quad \langle C_i, Z\rangle = 0) \Leftrightarrow \big(\forall i \in [\![1\,;p]\!],\quad {}^tC_iZ = 0\big)$$
et comme les ${}^tC_i$ sont les lignes de ${}^tA$: $\big(\forall i \in [\![1\,;p]\!],\quad {}^tC_iZ = 0\big) \Leftrightarrow {}^tAZ$

$\boxed{Z \in F^\perp \text{ si, et seulement si, } {}^tAZ = 0.}$

b) Soit X est la solution de $(\mathcal{T})$. • $AX \in \mathrm{Im}(A) = F$,
• ${}^tA(B - AX) = {}^tAB - {}^tAAX = 0$ puisque X est solution de $\mathcal{T}$. Donc $B - AX \in F^\perp$.
C'est deux points caractérisent le projeté orthogonal de B sur F, donc

$\boxed{AX \text{ est le projeté orthogonal } p_F(B) \text{ de B sur F.}}$

5. $\min\limits_{Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||AY - B|| = \min\limits_{C \in F} ||C - B||$ est atteint uniquement pour $C = p_F(B) = AX$ où X est l'unique solution de $(\mathcal{T})$.

$\boxed{(\mathcal{S}) \text{ admet une unique pseudo-solution, qui est l'unique solution de } (\mathcal{T}).}$

6. **a)** $L_1 + L_2 - L_3$ donne $0 = 6$, qui est impossible !

$$\boxed{\text{Le système } (\mathcal{S}) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ n'admet aucune solution.}}$$

b) Le système s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{rg}(A) = 2$, il admet une unique pseudo-solution.

$$(\mathcal{T}) \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAB \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 3y = 11 \\ 3x + 6y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = 13/15 \end{cases}$$

$\boxed{X = (x,y) = (3/5, 13/15) \text{ est l'unique pseudo-solution de } (\mathcal{S}).}$

7. **a)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = ||B - AX||^2 = ||AX - B||^2$ avec $B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ce problème se ramène à la recherche de } X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ réalisant le} \\ \text{minimum de } ||AX - B|| \text{ avec } A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.\end{array}}$$

b) Comme les x_i ne sont pas tous égaux entre eux, $\mathrm{rg}(A) = 2$. Par ce qui précède, l'unique solution du problème est bien sûr solution de : $(\mathcal{T})$ ${}^tAAX = {}^tAB$.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} n\overline{x^2} & n\overline{x} \\ n\overline{x} & n \end{pmatrix},\ {}^tAB = \begin{pmatrix} n\overline{xy} \\ n\overline{y} \end{pmatrix}.$$

$$(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy} \\ \overline{x}a + b = \overline{y} \end{cases} \overset{L_1 - \overline{x}L_2 \to L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (\overline{x^2} - \overline{x}^2)a = \overline{xy} - \overline{x}.\overline{y} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La solution au problème est } \begin{cases} a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}.}$$