1. **Méthode des moments**

   (a) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\theta}{2}$.

   Par linéarité $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n} \times n\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\theta}{2}$ : $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de $\dfrac{\theta}{2}$.

   Les $(X_i)$ étant indépendantes, de même loi, possédant une espérance égale à $\dfrac{\theta}{2}$ et une variance, la loi faible des grands nombres assure que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers $\dfrac{\theta}{2}$ : $\overline{X}_n$ est un estimateur convergent de $\dfrac{\theta}{2}$.

   $$\overline{X}_n \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

   est un estimateur sans biais et convergent de $\dfrac{\theta}{2}$.

   (b) L'application $x \mapsto 2x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la convergence en probabilité de $\overline{X}_n$ vers $\dfrac{\theta}{2}$ entraîne la convergence en probabilité de $M_n = 2\overline{X}_n$ vers $2\dfrac{\theta}{2}$ : $M_n$ est un estimateur convergent de $\theta$.

   (c) $\mathbb{E}(M_n) = 2\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \theta$ : $M_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$, donc son risque quadratique est égale à sa variance.

   Par indépendance des $X_i$ :

   $r_\theta(M_n) = \dfrac{4}{n^2} \times n\mathbb{V}(X) = \dfrac{\theta^2}{3n}$.

   (d) i. Par linéarité, $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\theta}{2} = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\theta$, donc $T_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$ si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$.

   ii. Comme on suppose que $T_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$,

   $r_\theta(T_n) = \mathbb{V}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\frac{\theta^2}{12}$

   Montrer que le risque quadratique de $T_n$ est minimum si, et seulement si, $T_n = M_n$. *On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

   *Ainsi, parmi tous les estimateurs combinaisons linéaires des $X_i$ sans biais, $M_n$ est le plus efficace.*

2. **Méthode du maximum de vraisemblance**

   (a) Par définition de $f_\theta$,

   $$f_\theta(x_1) \times f_\theta(x_2) \times \cdots \times f_\theta(x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & \text{si } x_1 \leqslant \theta, \ldots, x_n \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Donc $f_\theta(x_1) \times f_\theta(x_2) \times \cdots \times f_\theta(x_n)$ est non nulle si, et seulement si, $\theta \geqslant \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Et comme $\theta \mapsto \dfrac{1}{\theta^n}$ est strictement décroissante que $]\,0\,;+\infty\,[$, $f_\theta(x_1) \times f_\theta(x_2) \times \cdots \times f_\theta(x_n)$ est maximum si et seulement si, $\theta = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

   (b) • $S_n(\Omega) = X(\Omega) = [\,0\,;\theta\,]$, donc $F_{S_n} = 0$ sur $]-\infty\,;0\,[$ et $F_{S_n} = 1$ sur $]\,\theta\,;+\infty\,[$.

   • Pour tout $s \in [\,0\,;\theta\,]$,

   $F_{S_n}(s) = \mathbb{P}(S_n \leqslant s) = \mathbb{P}\Big(\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}[X_i \leqslant s]\Big) \overset{\text{indép.}}{=} \prod_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}\mathbb{P}(X_i \leqslant s) = \left(\frac{s}{\theta}\right)^n$.

   • $F_{S_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,\theta\}$. On obtient une densité de $S_n$ par dérivation, par exemple :

   $$f_{S_n} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{ns^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } s \in [\,0\,;\theta\,], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   • $\displaystyle\int_0^\theta s f_{S_n}(s)\mathrm{d}s$ est une intégrale non impropre, $S_n$ admet une espérance valant :

   $\mathbb{E}(S_n) = \displaystyle\int_0^\theta s f_{S_n}(s)\mathrm{d}s = \frac{n}{n+1}\theta$.

   • $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(S_n) = \theta$ : $S_n$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\theta$.

   (c) On obtient successivement :

   $\mathbb{E}(S_n^2) = \dfrac{n}{n+2}\theta^2$, $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$ et

   $r_\theta(S_n) = \mathbb{V}(S_n) + b_\theta(S_n)^2 = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$.

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_\theta(S_n) = 0$, $S_n$ est un estimateur convergent de $\theta$.

   (d) Par linéarité, $\mathbb{E}(R_n) = \dfrac{n+1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \theta$ : $R_n$ est un estimateur sans biais de $\theta$.

   Alors $r_\theta(R_n) = \mathbb{V}(R_n) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}\theta^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ : $R_n$ est un estimateur convergent de $\theta$.

   (e) $\dfrac{r_\theta(R_n)}{r_\theta(S_n)} = \dfrac{n+1}{2n} < 1$ dès que $n \geqslant 2$, donc $r_\theta(R_n) < r_\theta(S_n)$ : $R_n$ est plus efficace que $S_n$.

3. **Méthode des statistiques d'ordre**

   Dans cette méthode, on exploite un lien entre un quantile - ici la médiane -, et le paramètre $\theta$.

(a) $\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m) \iff \mathbb{P}(X \leqslant m) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant m)$

$\iff \mathbb{P}(X \leqslant m) = \dfrac{1}{2} \iff F_X(m) = \dfrac{1}{2} \iff (m \in ]\,0\,;\theta\,[ \text{ et } \dfrac{m}{\theta} = \dfrac{1}{2}$.

$$\mathbb{P}(X \leqslant m) = \mathbb{P}(X \geqslant m) \iff m = \frac{\theta}{2}.$$

(b) Soit $x \in [\,0\,;\theta\,]$.

i. Pour tout $i$ de $[\![1\,;n]\!]$, $\chi_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{x}{\theta}\right)$ puisque $\mathbb{P}(X_i \leqslant x) = \dfrac{x}{\theta}$.
Par indépendance des $X_i$ et par stabilité de la loi binomiale,
$$\Sigma_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{x}{\theta}\right).$$

ii. Comme $\mu_n = Y_{k+1}$, $[\mu_n \leqslant x] = [Y_{k+1} \leqslant x]$ est l'événement : " au moins $k+1$ variables $X_i$ sont inférieures à $x$. Comme $\Sigma_n$ est la nombre de variables $X_i$ inférieures à $x$, $[\mu_n \leqslant x] = [\Sigma_n \geqslant k+1]$.

iii. $F_{\mu_n}(x) = \mathbb{P}(\mu_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\Sigma_n \geqslant k+1) = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{\mathbb{P}} (\Sigma_n = i)$ car $\Sigma_n(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$.

D'où : $F_{\mu_n}(x) = \dfrac{1}{\theta^n} \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} \binom{m}{i} x^i(\theta - x)^{n-i}$.

iv. $F_{\mu_n}$ est polynomiale sur $[\,0\,;\theta\,]$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$.

$$F'_{\mu_n}(x) = \frac{1}{\theta^n} \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i} \left[ix^{i-1}(\theta - x)^{n-i} - (n-i)x^i(\theta - x)^{n-i-1}\right]$$

$$F'_{\mu_n}(x) = \frac{n}{\theta^n} \sum_{i=k+1}^{n} \left[\binom{n-1}{i-1} ix^{i-1}(\theta - x)^{n-i} - \binom{n-1}{i}(n-i)x^i(\theta - x)^{n-i-1}\right]$$

$F'_{\mu_n}(x) = \dfrac{1}{\theta^n} \dbinom{n-1}{k} x^k(\theta - x)^{n-k-1}$ par télescopage.

Comme $k = \dfrac{n-1}{2}$, on définit une densité de $\mu_n$ en posant

$$f_{\mu_n}(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} \dfrac{n}{\theta^n} \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}}(\theta - x)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } x \in [\,0\,;\theta\,], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Pour $p$ et $q$ entiers naturels, on pose
$$I_{p,q} \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 u^p(1-u)^q \mathrm{d}u.$$

i. Une intégration par parties conduit à :
pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.

ii. En raisonnant par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ avec la propriété
$$\mathcal{P}_q : \quad « \forall p \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} »,$$
on obtient, pour tout $p$ et $q$ de $\mathbb{N}$, $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

iii. $\mathbb{E}(\mu_n)$ et $\mathbb{V}(\mu_n)$ existent puisque $f_{\mu_n}$ est continue sur $[\,0\,;\theta\,]$.
$\mathbb{E}(\mu_n) = \dfrac{n}{\theta^n} \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\int_0^\theta x^{\frac{n+1}{2}}(\theta - x)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x$
Le changement de variable affine $x = \theta u$, de classe $\mathcal{C}^1$, conduit à
$\mathbb{E}(\mu_n) = n\theta \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\int_0^1 u^{\frac{n+1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u = n\theta \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}}$
Le calcul précédent de $I_{p,q}$ donne, après simplification, $\mathbb{E}(\mu_n) = \dfrac{\theta}{2}$.
On traite de façon analogue le calcul de $\mathbb{E}(\mu_n^2)$.
$\mathbb{E}(\mu_n^2) = n\theta^2 \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\int_0^1 u^{\frac{n+3}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u = n\theta \dbinom{n-1}{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n+3}{2}, \frac{n-1}{2}}$
$\mathbb{E}(\mu_n^2) = \dfrac{n+3}{4(n+2)}\theta^2$ et $\mathbb{V}(\mu_n) = \dfrac{\theta^2}{4(n+2)}$.

(d) $\mathbb{E}(\nu_n) = 2\mathbb{E}(\mu_n) = \theta$ et $\mathbb{V}(\nu_n) = 4\mathbb{V}(\mu_n) = \dfrac{\theta^2}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ : $\nu_n$ est un estimateur sans biais et convergent de $\theta$.

4. **Comparaison de ces quatre estimateurs**
Les calculs précédents donnent les équivalents :
$r_\theta(M_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\theta^2}{3n}$, $r_\theta(S_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2\theta^2}{n^2}$, $r_\theta(R_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\theta^2}{n^2}$ et $r_\theta(\nu_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\theta^2}{n}$.
Par croissances comparées, le classement de ces estimateurs du plus efficace au moins efficace est :
$$R_n, \text{ puis } S_n, \text{ puis } M_n, \text{ et enfin } \nu_n.$$
*On remarquera que la présence ou non d'un biais n'est pas liée à l'efficacité.*

5. **Intervalles de confiance par $M_n$**

(a) Puisque $M_n$ est la moyenne empirique de $n$ variables indépendantes, de même loi, possédant une espérance et une variance, la variable centrée réduite $M_n^* \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{3n}\dfrac{M_n - \theta}{\theta}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite, en vertu du théorème central limite.

(b) Comme $M_n$ converge en probabilité vers $\theta \in ]0;+\infty[$, et comme $x \mapsto \theta/x$ est continue sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{\theta}{M_n}$ converge en probabilité vers 1.

D'après le théorème de Slutsky, $\dfrac{\theta}{M_n}M_n^* = \sqrt{3n}\dfrac{M_n-\theta}{M_n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(c) $\mathbb{P}\left(\theta \in \left[M_n - \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\,;\,M_n + \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\right]\right) =$

$\mathbb{P}\left(M_n - \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}} \leqslant \theta \leqslant M_n + \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) =$

$\mathbb{P}\left(|M_n-\theta| \leqslant \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sqrt{3n}\dfrac{M_n-\theta}{M_n}\right| \leqslant t_\alpha\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-\alpha$

en raison de la convergence en loi précédente et de la définition de $t_\alpha$.

Donc $\left[M_n - \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\,;\,M_n + \dfrac{M_n t_\alpha}{\sqrt{3n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\theta$ de niveau de confiance $1-\alpha$.

6. **Intervalles de confiance par $S_n$ et $R_n$**

(a) D'après la fonction de répartition de $S_n$,

$\mathbb{P}(\theta \in [S_n\,;\,\lambda_n S_n] = \mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{\lambda_n} \leqslant S_n \leqslant \theta\right) = 1 - \dfrac{1}{\lambda_n^n}$, donc

$$\mathbb{P}(\theta \in [S_n\,;\,\lambda_n S_n] = 1-\alpha \iff \lambda_n^n = \frac{1}{\alpha} \iff \lambda_n = \alpha^{-1/n}.$$

$\left[S_n\,;\,\dfrac{S_n}{\alpha^{1/n}}\right]$ est un intervalle de confiance de $\theta$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

(b) Puisque $S_n = \dfrac{n}{n+1}R_n$, $\left[\dfrac{nR_n}{n+1}\,;\,\dfrac{nR_n}{(n+1)\alpha^{1/n}}\right]$ est un intervalle de confiance de $\theta$ de niveau de confiance $1-\alpha$.

7. **Intervalles de confiance par les statistiques d'ordre**

(a) $D_n$ (resp. $U_n$) compte le nombre de succès $[X_i < \theta/2]$ (resp. $[X_i > \theta/2]$) tous de probabilité $1/2$ dans un schéma de Bernoulli de $n$ expériences. Donc $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1/2)$.

(b) En notant $\Delta_n$ le nombre d'échecs du premier schéma de Bernoulli, $\Delta_n$ suit aussi $\mathcal{B}(n,1/2)$, et $D_n + \Delta_n = n$. De plus,

$$[D_n \geqslant k] = [\Delta_n \leqslant n-k] = [\Delta_n \leqslant k].$$

Comme $D_n$ et $\Delta_n$ suivent la même loi, $\mathbb{P}(D_n \geqslant k) = \mathbb{P}(D_n \leqslant k)$.

$\mathbb{P}(D_n \geqslant k) = \mathbb{P}(D_n \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(D_n \geqslant k+1)$

$\mathbb{P}(D_n \geqslant k) = 1 - (\mathbb{P}(D_n \geqslant k) + \mathbb{P}(D_n = k))$, d'où

$2\mathbb{P}(D_n \geqslant k) = 1 + \mathbb{P}(D_n = k)$, donc $\mathbb{P}(D_n \geqslant k) > \dfrac{1}{2}$.

(c) La suite $\big(\mathbb{P}(S_n \geqslant k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, avec $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0) = 1$ et, $\forall k \geqslant n+1, \mathbb{P}(S_n \geqslant k) = 0$. Comme $\dfrac{\alpha}{2} \in ]0;1[$, il existe un plus petit entier (appartenant à $[\![0\,;\,n+1]\!]$) $s_\alpha$ tel que $\mathbb{P}(D_n \geqslant s_\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

Comme $\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(D_n \geqslant k) > \dfrac{1}{2}$, $s_\alpha \geqslant k+1$. Or $k+1 > \dfrac{n}{2}$ puisque $\dfrac{n}{2} = k$. On a bien $s_\alpha > \dfrac{n}{2}$.

(d) $\left[Y_{s_\alpha} < \dfrac{\theta}{2}\right] \subset [D_n \geqslant s_\alpha]$ entraîne $\mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} > Y_{s_\alpha}\right) \leqslant \mathbb{P}(D_n \geqslant s_\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

(e)
- De façon symétrique,

  $\left[Y_{n-s_\alpha+1} > \dfrac{\theta}{2}\right] \subset [U_n \geqslant (n-(n-s_\alpha+1)+1)]$ entraîne

  $\mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} < Y_{n-s_\alpha+1}\right) \leqslant \mathbb{P}(U_n \geqslant s_\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, puisque $U_n$ suit la même loi que $D_n$.
- $s_\alpha > \dfrac{n}{2}$ entraîne $n - s_\alpha + 1 < \dfrac{n}{2} + 1$, d'où $Y_{n-s_\alpha+1} \leqslant Y_{s_\alpha}$.

  $\mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} \notin ]Y_{n-s_\alpha+1}\,;\,Y_{s_\alpha}[\right) = \mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} < Y_{n-s_\alpha+1}\right) + \mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} > Y_{s_\alpha}\right) \leqslant \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$

  D'où : $\mathbb{P}\left(\dfrac{\theta}{2} \in [Y_{n-s_\alpha+1}\,;\,Y_{s_\alpha}]\right) \geqslant 1-\alpha$.

(f) On peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,1/2)$, loi commune de $D_n$ et $U_n$, lorsque $n$ devient grand, par $\mathcal{N}(n/2,n/4)$. Soit $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(n/2,n/4)$.

$\mathbb{P}(D_n \geqslant s_\alpha) \simeq \alpha/2 \iff \mathbb{P}(Z_n \geqslant s_\alpha) \simeq \alpha/2 \iff \mathbb{P}(Z_n \leqslant s_\alpha) \simeq 1-\alpha/2$

$\iff \Phi\left(\dfrac{s_\alpha - n/2}{\sqrt{n}/2}\right) \simeq 1-\alpha/2 \iff \dfrac{s_\alpha - n/2}{\sqrt{n}/2} \simeq \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, d'où

$$s_\alpha \simeq \frac{n + t_\alpha\sqrt{n}}{2}.$$

8. **Simulation**

```
t=input('theta ?'); n=input('n ?');
X=grand(1,n,"unf",0,t);
Mn=2*mean(X); Sn=max(X); Rn=(n+1)*Sn/n; nun=2*median(X);
```

9. **Calcul des intervalles de confiance**

On poursuit le script précédent par

```
a=input('risque alpha ?'); ta=cdfnor("X",0,1,1-a/2,a/2);
f=Mn*ta/sqrt(3*n); disp(Mn+f,Mn-f,'Intervalle par M(n)');
f=a^(-1:n); disp(Sn*f,Sn,'Intervalle par S(n) et R(n)');
sa=floor((n+ta*sqrt(n))/2); Y=gsort(X,'g','i');
disp(2*Y(sa),2*Y(n-sa+1),'Intervalle par nu(n)');
```