Exercice 1.

Inégalités de Kolmogorov

Partie I. ***Lorsque f et f" sont bornées.***

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec f et f'' bornées.

On pose $\mathrm{M}_0 \overset{\text{déf.}}{=} \sup\limits_{\mathbb{R}}|f|$ et $\mathrm{M}_2 \overset{\text{déf.}}{=} \sup\limits_{\mathbb{R}}|f''|$

On veut montrer que f' est aussi bornée.

1. *Par la formule de Taylor avec reste intégrale.*

a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $a>0$. Écrire la formule de Taylor entre x et $x+a$, à l'ordre 1.

b) Écrire alors $f'(x)$ en fonction de $f(x+a)$, $f(x)$ et d'une intégrale faisant apparaître f''.

Majorer pour aboutir à $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{a}+\dfrac{\mathrm{M}_2 a}{2}$.

c) Qu'en déduit-on pour f' ?

2. *Par la formule de Taylor-Lagrange.*

a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $a>0$. Écrire l'égalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+a$, à l'ordre 1.

b) Exprimer alors $f'(x)$ pour aboutir à $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{M}_0}{a}+\dfrac{\mathrm{M}_2 a}{2}$.

3. *Une première inégalité.*

Quel est le minimum du membre de droite de la majoration précédente lorsque a varie dans $]\,0\,;+\infty\,[$?

En déduire l'inégalité de Kolmogorov

$$\mathrm{M}_1 \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

où M_1 désigne naturellement $\sup\limits_{\mathbb{R}}|f'|$.

4. *Une amélioration.*

a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $a>0$. En écrivant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+a$, à l'ordre 1, puis entre x et $x-a$ toujours à l'ordre 1, montrer que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}_0}{a}+\dfrac{\mathrm{M}_2 a}{2}$.

b) En déduire l'inégalité de Kolmogorov (1)

$$\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

Partie II. ***Et à l'ordre supérieur ?***

En s'inspirant de la première partie, montrer que, si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}(9\mathrm{M}_0^2\mathrm{M}_3)^{1/3}.$$

f'' est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?

(1). Cette égalité est optimale : on peut construire des fonctions pour lesquelles l'égalité a lieu.

Exercice 2.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que G établit une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque G^{-1} est-elle dérivable ?

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on définit $f(x)$ par

$$\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1.$$

2. Montrer que f est effectivement définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est dérivable.

3. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet la droite d'équation $y=-x$ pour axe de symétrie.

4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y=x$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ et tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 3.

Dans cet exercice, f désigne une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$ vérifiant $f(0)=0$ et $0\leqslant f'\leqslant 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

On pourra s'intéresser à la fonction $x\mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)\,dt$...

Est-il possible qu'il y ait égalité ? Si oui, pour quelle(s) fonction(s) ?

2. Et avec $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x$ à la place de $\displaystyle\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$?

Étudier là aussi les éventuels cas d'égalité.