Exercice 1.

Inégalités de Kolmorogov

Partie I. ***Lorsque f et f" sont bornées.***

1. *Par la formule de Taylor avec reste intégrale.*

- $f(x+a) = f(x) + af'(x) + \int_x^{x+a} (x+a-t)f^{(2)}(t)\mathrm{d}t$ conduit à
- $f'(x) = \frac{1}{a}\left(f(x+a) - f(x) - \int_x^{x+a} (x+a-t)f''(t)\mathrm{d}t\right)$ donnant par l'inégalité triangulaire

$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{a}\left(2\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_2 \int_x^{x+a} f''(t)\mathrm{d}t\right)$

- Comme $\int_x^{x+a} f^{(2)}(t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}$, il vient $|f'(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{a} + \frac{\mathrm{M}_2 a}{2}$
- En prenant $a = 1$ par exemple, ceci prouve que $|f|$ est bornée par $2\mathrm{M}_0 + \frac{\mathrm{M}_2}{2}$, donc que f' est bornée.

2. *Par la formule de Taylor-Lagrange.*

- Il existe $c \in]\,a\,;\,b\,[$ tel que $f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(c)$, ce qui conduit à

$f'(x) = \frac{1}{a}\left(f(x+a) - f(x) - \frac{a^2}{2}f''(c)\right)$, et l'inégalité triangulaire amène $|f'(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{M}_0}{a} + \frac{\mathrm{M}_2 a}{2}$.

3. *Une première inégalité.*

L'étude de $a \mapsto \frac{2\mathrm{M}_0}{a} + \frac{\mathrm{M}_2 a}{2}$ montre que le minimum du membre de droite sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ est $2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$, atteint en $a = 2\sqrt{\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_2}$, ce dont découle directement l'inégalité $\mathrm{M}_1 \leqslant 2\sqrt{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$.

4. *Une amélioration.*

- On peut écrire :

$|f(x+a) - f(x) - af'(x)| \leqslant \frac{a^2\mathrm{M}_2}{2}$ et $|f(x-a) - f(x) + af'(x)| \leqslant \frac{a^2\mathrm{M}_2}{2}$.

- En écrivant $2af'(x) = (f(x-a) - f(x) + af'(x)) + (-f(x+a) + f(x) + af'(x)) + f(x+a) - f(x-a)$,

on en déduit par l'inégalité triangulaire :

$|2af'(x)| \leqslant |f(x-a) - f(x) + af'(x)| + |-f(x+a) + f(x) + af'(x)| + |f(x+a)| + |f(x-a)| \leqslant a^2\mathrm{M}_2 + 2\mathrm{M}_0$ d'où le résultat en divisant par $2a > 0$:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{\mathrm{M}_0}{a} + \frac{\mathrm{M}_2 a}{2}.$$

- La fonction définie par $v(h) = \frac{\mathrm{M}_0}{h} + \frac{\mathrm{M}_2 h}{2}$ a pour dérivée $v'(h) = \frac{\mathrm{M}_2 h^2 - 2\mathrm{M}_0}{2h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \sqrt{\frac{2\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_2}}$.

On obtient $|f'(x)| \leqslant v(h_0) = \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}$. D'où l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathrm{M}_1 \leqslant \sqrt{2\mathrm{M}_0\mathrm{M}_2}.$$

Partie II. ***Et à l'ordre supérieur ?***

On applique de même l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 entre x et $x+a$ puis entre x et $x-a$:

$|f(x+a) - f(x) - af'(x) - a^2f''(x)| \leqslant \frac{a^3\mathrm{M}_3}{6}$ et $|f(x-a) - f(x) + af'(x) - a^2f''(x)| \leqslant \frac{a^3\mathrm{M}_3}{6}$.

On en déduit :

$|2af'(x)| \leqslant |f(x-a) - f(x) + af'(x) - a^2f''(x)| + |-f(x+a) + f(x) + af'(x) + a^2f''(x)| + |f(x+a)| + |f(x-a)| \leqslant \frac{a^3\mathrm{M}_3}{3} + 2\mathrm{M}_0$

d'où $|f'(x)| \leqslant \frac{a^2\mathrm{M}_3}{6} + \frac{\mathrm{M}_0}{a}$.

- La fonction définie par $v(h) = \frac{\mathrm{M}_0}{h} + \frac{\mathrm{M}_3 a^2}{6}$ a pour dérivée $v'(h) = \frac{\mathrm{M}_3 a^3 - 3\mathrm{M}_0}{3a^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \left(\frac{3\mathrm{M}_0}{\mathrm{M}_3}\right)^{1/3}$.

On obtient $|f'(x)| \leqslant v(h_0) = \frac{1}{2}(9\mathrm{M}_0^2\mathrm{M}_3)^{1/3}$.

Ce qui établit l'inégalité de Kolmogorov

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}(9\mathrm{M}_0^2\mathrm{M}_3)^{1/3}.$$

- f' et $f^{(3)}$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, la partie I entraine que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. • G est la primitive s'annulant en 0 de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- Comme : $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{G}'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$, G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Avec le point précédent, ceci établit que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{G}(\mathbb{R})$.
- Comme : $\forall t \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, \mathrm{e}^{t^2} \geqslant 1$, par croissance de l'intégrale on obtient la minoration : $\forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, \mathrm{G}(x) \geqslant x$. Par comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = +\infty$.
- Le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{G}(x)$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{G}(-x) = \int_0^{-x} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = -\int_0^{x} \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u = -\mathrm{G}(x).$$

Ainsi G est impaire et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{G}(x) = -\infty$. Avec le point précédent, $\mathrm{G}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{G est une bijection } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Comme G′ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le cours de première année affirme que G^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\mathrm{G}^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\mathrm{G}'(\mathrm{G}^{-1}(y))}$

$$\boxed{\mathrm{G}^{-1} \text{ est dérivable.}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Observons que : $\forall y \in \mathbb{R}$,
$\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \mathrm{G}(y) - \mathrm{G}(x) = 1 \Leftrightarrow y = \mathrm{G}^{-1}\big(1 + \mathrm{G}(x)\big)$ puisque G est bijective. Ainsi, puisque l'équation définissant $f(x)$ possède une unique solution, $f(x)$ est parfaitement définie. f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a même l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{G}^{-1}\big(1 + \mathrm{G}(x)\big) \qquad (\heartsuit).$$

Et comme G et G^{-1} sont dérivables sur $\mathbb{R}$, cette expression montre que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable.}}$$

3. Il convient déjà de réfléchir aux conditions pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f admette la droite Δ d'équation $y = -x$ pour axe de symétrie.
- Si $\mathrm{M} = (x, y)$, alors son symétrique par rapport à Δ est $\mathrm{M}' = (-y, -x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mathrm{M} = (x, f(x))$ le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x. Le symétrique M′ de M par rapport à l'axe Δ est $\mathrm{M}' = (-f(x), -x)$, et il est aussi sur $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, $-x = f(-f(x))$. On peut ainsi conclure que :

$$\mathcal{C}_f \text{ est symétrique par rapport à } \Delta \text{ si, et seulement si, } \forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x.$$

- Il reste à s'assurer que f vérifie cette condition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-f(x)) &= \mathrm{G}^{-1}\big(1 + \mathrm{G}(-f(x))\big) = \mathrm{G}^{-1}\big(1 - \mathrm{G}(f(x))\big) \quad \text{(G est impaire.)} \\ &= \mathrm{G}^{-1}\big(1 - (1 + \mathrm{G}(x))\big) \quad (\mathrm{G} \circ f = 1 + \mathrm{G} \text{ par } (\heartsuit)) \\ &= \mathrm{G}^{-1}\big(-\mathrm{G}(x))\big) = -\mathrm{G}^{-1}\big(\mathrm{G}(x)\big) = -x \quad \text{(G est impaire !)} \end{aligned}$$

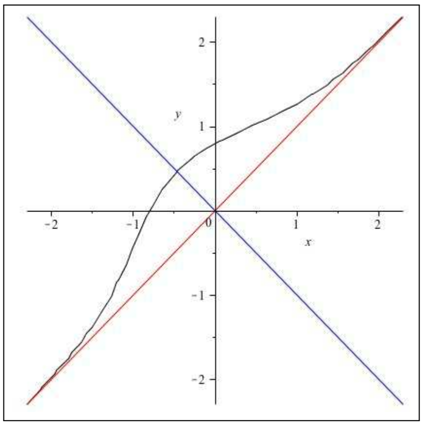
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x$.

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est symétrique par rapport à } \Delta.}$$

4. Soit $x \in [\,0\,;\,+\infty\,[$. De $\mathrm{G}(f(x)) = 1 + \mathrm{G}(x)$ on tire $\mathrm{G}(f(x)) > \mathrm{G}(x)$ puis $f(x) > x$ puisque G est strictement croissante. On a alors :

$\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $1 \geqslant \mathrm{e}^{x^2}(f(x) - x)$ d'où $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} + x$.

$\forall x \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,, 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, et en gendarmant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$. La première bissectrice est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$... et par symétrie par rapport à Δ, elle l'est aussi en $-\infty$!



EXERCICE 3.

1. Soit $g : [\,0\,;\,1\,] \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$.

Il s'agit alors d'établir que $g(1) \geqslant 0$.

Comme f est $\mathcal{C}^1$, g est $\mathcal{C}^2$ (différence de primitives de fonctions $\mathcal{C}^1$). On a :
$\forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, g'(x) = 2f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^3(x) = f(x)\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\right)$.
Comme $f(0) = 0$ et f est croissante, on a : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, f(x) \geqslant 0$.
On étudie alors sur $[\,0\,;\,1\,]$ $h : x \mapsto 2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$.

$\forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, h'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1-f'(x)) \geqslant 0$. Ainsi h est croissante, et comme $h(0)=0$, h est positive. Ce qui induit la positivité de g', donc la croissance de g, qui elle aussi vérifie $g(0)=0$. Donc $g(1) \geqslant 0$ ... $\mathfrak{CQFD}$!

$$\boxed{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

Analyse du cas d'égalité.
Pour qu'il y ait égalité, il est nécessaire que $g(1)=0$. Et comme g est croissante et nulle en 0, cela entraîne que g est nulle. Alors g' est nulle, donc le produit fh est nulle. Distinguons deux cas :
- si f est nulle, alors il y a bien cas d'égalité.
- si f n'est pas nulle, comme f est continue et croissante, il existe un réel α tel que f est nulle sur $[\,0\,;\,\alpha\,]$ et strictement positive sur $]\,\alpha\,;\,1\,]$.

Supposons $\alpha > 0$.
Sur l'intervalle $]\,\alpha\,;\,1\,]$, on a : h est nulle, donc h' aussi, et comme f est non nulle, $1-f'=0$, donc $f'=1$.
Mais sur l'intervalle $[\,0\,;\,\alpha\,]$, f est nulle donc $f'=0$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f'(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f'(x)$, ce qui contredit la continuité de f' en α.
C'est donc que $\alpha=0$, avec $f'=1$ sur $]\,0\,;\,1\,]$, et même sur $[\,0\,;\,1\,]$ par continuité. Comme $f(0)=0$, on en déduit que : $\forall x \in [\,0\,;\,1\,]\,, f(x)=x$. On vérifie alors sans peine qu'il y a bien égalité pour cette fonction.

Bilan : il y a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, f est la fonction nulle ou la fonction identité.

2. • *Avec f^4 au lieu de f^3 ...*
Pour tout $x \in [\,0\,;\,1\,]$, $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ et les conditions $f(0)=0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$ donnent : $0 \leqslant f(x) \leqslant x \leqslant 1$, ce qui fait que $f^4(x) \leqslant f^3(x)$ et il vient immédiatement :

$$\boxed{\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2}$$

Le cas d'égalité nécessite le cas d'égalité de la question 1, par conséquent $f=0$ ou $f = id_{[\,0\,;\,1\,]}$. Mais il n'y a pas égalité dans le cas $f = id_{[\,0\,;\,1\,]}$ ($1/5 < 1/4$!).

Seul le cas $f=0$ donne égalité.

• *Avec f^2 au lieu de f^3 ...*
Les arguments précédents montrent que $f^2 \geqslant f^3$ et on peut penser que l'inégalité ne tiendra pas ... Prenons par exemple $f = id_{[\,0\,;\,1\,]}$ et observons :

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \;!$$

L'inégalité ne demeure pas en remplaçant f^3 par f^2.

Complément : Nous aurons l'occasion de démontrer le résultat général suivant :

Inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout fonction f continue sur $[\,0\,;\,1\,]$, $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2$ avec égalité uniquement pour les fonctions constantes.