Exercice 1.

Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère l'endomorphisme f tel que

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^3 puis montrer que f est diagonalisable en précisant ses sous-espaces propres.

2. Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont-ils stables par f ?

3. Montrer que les seuls sous-espaces de dimension 1 stables par f sont ses 3 sous-espaces propres.

4. Montrer que, si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors $E_\lambda \oplus E_\mu$ est stable par f.

5. **a)** Soit F un sous-espace stable par f de dimension 2. Soit u_{-1} un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1. On suppose que $u_{-1} \notin F$.

i. F et E_{-1} sont supplémentaires.

ii. Montrer que u_0, puis u_1 appartiennent à F.

iii. En déduire que $F = E_0 \oplus E_1$.

b) Déterminer tous les sous-espaces propres de dimension 2 stables par f.

6. Combien de sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont-ils stables par f ?

Exercice 2.

Sous-espaces stables d'un endomorphisme non diagonalisable

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de f et justifier que f n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que f admet exactement 1 sous-espace stable de dimension 0, 2 sous-espaces stables de dimension 1 et 1 sous-espace stable de dimension 3 que l'on précisera.

3. On note aussi f^* l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tM$.
On rappelle que si X et Y sont les colonnes représentant canoniquement les vecteurs les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$, alors $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.
Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

4. Soit F un sous-espace de dimension 2 stable par f (s'il en existe). On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on appelle u un vecteur non nul tel que

$$F^\perp = \mathrm{Vect}(u).$$

a) Justifier l'existence d'un tel vecteur u.

b) Montrer que : $\forall x \in F, \quad x \perp f^*(u)$.

c) En déduire que u est un vecteur propre de f^*.

5. Soit u un vecteur propre de f^*. Montrer que $\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp$ est un sous-espace stable par f de dimension 2.

6. Déduire des deux questions précédentes les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 stable par f.

Exercice 3.

Manipulation de la formule du produit matriciel

On rappelle que :
$\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$\forall B = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

on a : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Montrer en utilisant cette formule que :

1. le produit matriciel est distributif : $(\lambda A + B)C = \lambda AC + BC$;

2. si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont triangulaires supérieures, alors AB l'est aussi.

3. le produit matriciel est associatif : $(AB)C = A(BC)$;

4. si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \mathrm{Tr}({}^tAB) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$;

5. la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$: $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.