EXERCICE 1. *Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable*

1. $M^3 = M$ donc $X^3 - X = (X+1)X(X-1)$ est annulateur de M donc de f. Donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 0, 1\}$. On vérifie que -1, 0 et 1 sont valeurs propres de M donc de f, avec $E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,1,-1))$, $E_0 = \mathrm{Vect}((0,1,-1))$ et $E_1 = \mathrm{Vect}((1,2,-1))$.

2. Comme $f(0) = 0$ (comme pour toute application linéaire) $\{0\}$ est stable par f, et comme $\forall u \in E, f(u) \in E$ (endomorphisme...), E est stable par f.

3. Soit F un sous-espace stable de dimension 1. Soit u un générateur de F : $F = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u \neq 0$. Comme $f(u) \in F = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$: u est un vecteur propre de f, donc F est sous-espace propre de f.

4. En notant u_λ et u_μ des vecteurs propres associés respectivement à λ et μ.
On a : $E_\lambda = \mathrm{Vect}(u_\lambda)$ et $E_\mu = \mathrm{Vect}(u_\mu)$.
$\forall v \in E_\lambda \oplus E_\mu, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, v = \alpha u_\lambda + \beta u_\mu$.
Et alors $f(v) = \alpha\lambda u_\lambda + \beta\mu u_\mu \in E_\lambda \oplus E_\mu$
Donc si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors $E_\lambda \oplus E_\mu$ est stable par f.

5. a) Soit F un sous-espace stable de dimension 2 et $u_{-1} \notin F$.

i. $\dim(F) + \dim(E_{-1} = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $F \cap E_{-1} = \{0\}$ car $u_{-1} \notin F$. F et E_{-1} sont supplémentaires.

ii. • $u_0 \in \mathbb{R}^3$ donc il existe $u \in F$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $u_0 = u + xu_{-1}$.
En appliquant f à cette égalité, $0 = \underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{-xu_{-1}}_{\in E_{-1}} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in E_{-1}}$.
Par unicité de la décomposition, $xu_{-1} = 0$, donc $x = 0$ et $u_0 = u \in F$.
• $u_1 \in \mathbb{R}^3$ donc il existe $u \in F$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $u_1 = u + xu_{-1}$.
En appliquant f à cette égalité, $u_1 = \underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{-xu_{-1}}_{\in E_{-1}} = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{xu_{-1}}_{\in E_{-1}}$.
Par unicité de la décomposition, $-xu_{-1} = xu_{-1}$, donc $x = 0$ et $u_1 = u \in F$.

iii. Finalement, (u_0, u_1) est une famille libre (car de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) de F de dimension 2, donc une base de F : $F = \mathrm{Vect}(u_0, u_1) = E_0 \oplus E_1$.

b) Comme un sous-espace dimension 2 ne peut pas contenir simultanément une famille de vecteurs propres associés à -1, 0 et 1, les sous-espaces propres de dimension 2 de f sont $E_0 \oplus E_1$, $E_{-1} \oplus E_1$ et $E_{-1} \oplus E_0$.

6. Il existe exactement 8 sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables pas f : $\{0\}$, E_{-1}, E_0, E_1, $E_0 \oplus E_1$, $E_{-1} \oplus E_1$, $E_{-1} \oplus E_0$ et E.

EXERCICE 2. *Sous-espaces stables d'un endomorphisme non diagonalisable*

1. $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ et $E_1 = \mathrm{Vect}((1,1,0))$. Et comme $\dim E_{-1} + \dim E_1 = 2 < \dim(\mathbb{R}^3)$, f n'est pas diagonalisable.

2. $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont les seuls sous-espaces de dimension 0 et 3 et ils sont stables par f.
Si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est stables par f, alors il existe k tel que $f(u) = ku$, donc F est un sous-espace propre de f. Donc les seuls sous-espaces stables par f de dimension 1 sont E_{-1} et E_1.

3. a) Comme $\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$, il existe u non nul tel que $F^\perp = \mathrm{Vect}(u)$.

b) $\forall x \in F, \langle x, f^*(u)\rangle = \langle f(x), u\rangle = 0$ car $f(x) \in F$ par stabilité et $u \in F^\perp$.
Donc : $\forall x \in F, \quad x \perp f^*(u)$.

c) D'où on déduit que $f^*(u) \in F^\perp$. Comme $F^\perp = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f^*(u) = ku$: u est un vecteur propre de f^*.

4. $\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp$ est de dimension 2. Soit λ la valeur propre de f^* associée à u.
$\forall x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp, \langle f(x), u\rangle = \langle x, f^*(u)\rangle = \langle x, \lambda u\rangle = \lambda \langle x, u\rangle = 0$.
Ainsi, $\forall x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp, f(x) \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$, et $\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp$ est un sous-espace stable par f de dimension 2.

5. Des deux questions précédentes on déduit que les sous-espaces de dimension 2 stables par f sont exactement les sous-espaces $\big(\mathrm{Vect}(u)\big)^\perp$ où u est un vecteur propre de f^*. Il n'y a plus qu'à déterminer les vecteurs propres de f^* dont la matrice est ${}^t\mathrm{M}$. On sait déja que $\mathrm{Sp}({}^t\mathrm{M}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \{-1, 1\}$.
On trouve :
$\mathrm{SEP}(f^*, -1) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ et $\mathrm{SEP}(f^*, 1) = \mathrm{Vect}((0,0,1))$.
Les seuls sous-espaces de dimension 2 stables par f sont :
$\mathrm{Vect}((1,-1,0))^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$ et $\mathrm{Vect}((0,0,1)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$.