Étude d'endomorphismes nilpotents.

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel normé des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera noéte I_n et la matrice nulle O_n.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.
Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

— v^0 est l'endomorphisme unité,
— $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in \{1, \dots, n\},\ u_{i,i} = \lambda \\ u_{i,j} = 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m\to+\infty} S_m \quad \text{avec} \quad S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m.
On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A + B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

1 Quelques calculs préliminaire.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Déterminer les éléments propres de la matrice A.

2. Vérifier que $\ker(A + I_3)^2 \oplus \ker(A - 2I_3) = \mathbb{C}^3$.

3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.

2.

2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n - 1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.

2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.

3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.

5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n - 1$.

3 Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.

2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de

$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Montrer que :
(i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,
(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,
(iii) $\forall m \geq r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

4 Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

1.3. Vérifier alors que l'on a

$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

1.4. En déduire

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) \leq i$$

1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) = i$.

2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.

3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que

$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$$

soit une base de E.

4. Ecrire la matrice de v dans cette base. Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.

5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

5 Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$, d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que : $\forall M \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{C})$,

$$P^{-1}\alpha(M)P = \alpha(P^{-1}MP)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$e^z = i,\ e^z = -1,\ e^z = -3 - 4i$$

3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$. Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = \mu$.

4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que $e^s = \mu$.

4.1. Déterminer $\alpha(sI_n)$.

4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = sI_n + J(0)$. Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.

4.3. Vérifier que la matrice $\mu(\alpha(J(0)) - I_n)$ est nilpotente de rang $n-1$.

4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu)$$

5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7. Applications.

7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Déterminer une matrice X_1 telle que $\alpha(X_1) = T$.

7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.

7.2.1 Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.2.2 Soit $H = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & \ln(2) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.

7.2.3 Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$