Équations aux dérivées partielles

Dans ce devoir, je vous propose d'aborder une famille de problèmes que l'on rencontre fréquemment en mathématiques appliquées (en économie, en physique ou en biologie, par exemple), appelés *équations aux dérivées partielles*. Il s'agit de déterminer les fonctions dont les dérivées partielles vérifient une équation donnée.

Les parties sont indépendantes mais je vous conseille de les traiter dans l'ordre.

Partie I. *Un premier exemple.*

On cherche toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D \overset{\text{déf.}}{=}]0\,;+\infty[^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in D, \qquad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \dfrac{x}{y} \\ \partial_2(f)(x,y) = \dfrac{2y-x^2}{2y^2} \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit f une solution du problème.

a) Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ telle que

$$\forall (x,y) \in D, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{2y} + g(y).$$

b) En déduire qu'il existe une constante réelle λ telle

$$\forall (x,y) \in D, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{2y} + \ln(y) + \lambda.$$

2. Déterminer toutes les solutions du problème.

Partie II. *Un exemple du second ordre.*

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $D \overset{\text{déf.}}{=}]0\,;+\infty[\times \mathbb{R}$.

On définit les fonctions f et g sur D par

$$\forall (x,y) \in D, \qquad f(x,y) = \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad g(x,y) = (\varphi \circ f)(x,y) = \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

1. a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et vérifier que

$$\forall (x,y) \in D, \qquad \partial_1(f)(x,y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

b) Exprimer de même les dérivées partielles secondes $\partial^2_{1,1}(g)$ et $\partial^2_{2,2}(g)$ à l'aide de φ et φ'.

2. Dans cette question, on cherche toutes les fonctions h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)h''(t) + 2th'(t) = t \tag{2}$$

a) Soit h une solution de (2). En remarquant que le premier membre de cette équation est la dérivée de $t \mapsto (1+t^2)h'(t)$, déterminer h'.

b) En déduire que les solutions de (2) sont exactement toutes les fonctions du type

$$t \mapsto \frac{1}{2}t + \lambda \arctan(t) + \mu$$

où λ et μ sont deux constantes réelles quelconques.

3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y) \in D, \qquad \partial^2_{1,1}(g)(x,y) + \partial^2_{2,2}(g)(x,y) = \frac{y}{x^3} \tag{3}$$

a) Montrer que si g vérifie (3) alors φ vérifie (2).

b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.

c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (3).

Partie III. *Ordres 0, 1 et 2 mêlés.*

Dans cette partie, on recherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) \times \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial_1(f)(x,y) \times \partial_2(f)(x,y) \tag{4}$$

1. a) Montrer que s'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = a(x) \times f(x,y),$$

alors f est solution de (4).

b) On suppose que f est une solution de (4) et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \frac{\partial_1(f)(x,y)}{f(x,y)}.$$

Calculer $\partial_2(f)$ et en déduire qu'il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(f)(x,y) = a(x) \times f(x,y).$$

2. En déduire que les solutions de (4) sont exactement les fonctions de la forme $f : (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

On pourra commencer par considérer, pour f solution de (4), $g(x,y) \overset{\text{déf.}}{=} f(x,y)e^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction a définie par la question 1), et évaluer $\partial_1(f)$...