Partie I. ***Un premier exemple.***

1. **a)** Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $x \mapsto f(x,y) - \dfrac{x^2}{2y}$ est une fonction de dérivée nulle sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, donc une constante par rapport à x, ne dépendant que de y. Autrement dit : il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{2y} + g(y).$$

b) On a alors : $\forall y \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,y) = -\dfrac{1}{2y^2} + g'(y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{2y^2}$, donc $\forall y \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[\,, \quad g'(y) = \dfrac{1}{y}$, donc il existe une constante λ telle que $g : y \mapsto \ln(y) + \lambda$.

2. Réciproquement, on vérifie que s'il existe λ telle que $f(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{2y} + \ln(y) + \lambda$, alors f satisfait le système (1).

Les solutions de (1) sont les fonctions $f(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{2y} + \ln(y) + \lambda$ où λ est une constante réelle quelconque.

Partie II. ***Un exemple du second ordre.***

1. **a)** f est une fraction rationnelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur D car son dénominateur ne s'annule pas. Par composition de fonctions $\mathcal{C}^2$, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, et par dérivation des fonctions composées, donc

$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\big(\frac{y}{x}\big) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'\big(\frac{y}{x}\big)$$

b)
$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2}{x^4}\varphi''\big(\frac{y}{x}\big) + \frac{2y}{x^3}\varphi'\big(\frac{y}{x}\big) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{x^2}\varphi''\big(\frac{y}{x}\big)$$

2. **a)** En primitivant (2), on a : $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)h'(t) = \dfrac{t^2}{2} + k.$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = \dfrac{t^2}{2(1+t^2)} + \dfrac{k}{1+t^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{k-(1/2)}{1+t^2}.$

b) En primitivant à nouveau et en posant $\lambda = k - (1/2)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \dfrac{1}{2}t + \lambda \arctan(t) + \mu.$

Réciproquement, on vérifie sans peine que si λ et μ sont deux constantes réelles quelconques, alors $t \mapsto \dfrac{1}{2}t + \lambda \arctan(t) + \mu$ est solution de (2).

3. **a)** Supposons que g vérifie (3). Alors, par les formules de II.1.b),
$\forall (x,y) \in \mathrm{D}, \quad \left(\dfrac{y^2}{x^4} + \dfrac{4}{x^2}\right)\varphi''\big(\dfrac{y}{x}\big) + \dfrac{2y}{x^3}\varphi'\big(\dfrac{y}{x}\big) = \dfrac{y}{x^3},$
ce qui induit en prenant en particulier $x = 1$ et $t = y$,
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = t.$
Donc φ est solution de (2).

b) Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathrm{D}, \quad g(x,y) = \dfrac{y}{2x} + \lambda \arctan\big(\dfrac{y}{x}\big) + \mu.$

c) Réciproquement, en calculant $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ pour $g(x,y) \mapsto \dfrac{y}{2x} + \lambda \arctan\big(\dfrac{y}{x}\big) + \mu$, on vérifie que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (3).

Partie III. ***Ordres 0, 1 et 2 mêlés.***

1. **a)** En supposant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x) \times f(x,y)$, une dérivation par rapport à y donne
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = a(x) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, qui, multipliée par $f(x,y)$ donne exactement (4).

b) On a : $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times f - \dfrac{\partial f}{\partial x} \times \dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2} = 0$ car f est solution de (4). g est constante par rapport à y, donc il existe une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = a(x)$.

2. Supposons que f est une solution de (4). Soit a la fonction définie par III.1.b) et soit A une primitive de a sur $\mathbb{R}$.
Soit enfin $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$. Alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - a(x)f(x,y)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = 0.$
Donc il existe ψ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \psi(y)$, et ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ car g l'est.
Alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)} = \psi(y)\varphi(x)$, en posant $\varphi(x) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ sur $\mathbb{R}$, ce qui définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et φ et ψ s'annulent pas, car f, solution de (4), ne peut s'annuler.
Réciproquement, si $f : (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ où φ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas, alors

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y) = \varphi'(x)\psi(y)\varphi(x)\psi'(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, donc f vérifie (4).