

Comme vous le savez depuis l'an dernier, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Je vous propose de calculer sa somme dans le cas particulier $\alpha = 2$. Historiquement, c'est le mathématicien suisse Leonhard EULER (1707-1783) qui trouva le premier cette valeur. La démonstration que je vous propose est une démonstration récente (1973) et élémentaire⁽¹⁾ due au mathématicien grec Ioannis PAPANIMITRIOU.



Dans cet exercice, on note \cot la fonction *cotangente*, définie sur $]0; \pi[$, par $\cot = \frac{\cos}{\sin}$.

1. Soit n un entier naturel impair, et p tel que $n = 2p + 1$.
- a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n , dont on déterminera les coefficients, tel que :

$$\forall x \in]0; \pi[, \quad \sin(nx) = \sin^n(x) P_n(\cot^2(x)).$$

- b) Déterminer les racines de P_n .

- c) En déduire $\sum_{k=1}^p \cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ en fonction de p .

2. Justifier élégamment l'encadrement

$$\forall x \in [0; \pi/2[, \quad \sin x \leq x \leq \tan x.$$

3. a) Déduire des questions précédentes un encadrement de $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2}$.

- b) Établir finalement l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Cette question sort de l'objectif fixé initialement – Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de comparaisons séries/intégrales, donner un encadrement de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$ et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ (pour n tendant vers $+\infty$) lorsque $\alpha \leq 1$.

(1). J'entends par élémentaire « ne faisant appel qu'à des notions maîtrisées en fin de première année.»