1. **a)** Soit $x \in]\,0\,;\,\pi\,]$. La formule de De Moivre assure :
$$\sin(nx) = \operatorname{Im}\big((\cos x + i\sin x)^n\big).$$
$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x)\\ &= \sin^n x \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n} i^k \cot^{n-k} x\end{aligned}$$
Or i^k est imaginaire uniquement pour k impair. En écrivant $k = 2j+1$ où $j \in [\![0\,;\,p]\!]$, nous avons $i^k = i^{2j+1} = (-1)^j i$. Ainsi :
$$\sin(nx) = \sin^n x \sum_{j=0}^{p}\binom{n}{2j+1}(-1)^j \cot^{2(p-j)} x$$
Le polynôme P_n suivant convient :
$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{p}\binom{n}{2j+1}(-1)^j X^{p-j} = \binom{n}{1}X^p - \binom{n}{3}X^{p-1} + \cdots + (-1)^p.$$

b) Cherchons déjà les racines de P_n dans $]\,0\,;\,\pi/2\,[$. Comme pour $0 < x < \pi/2$, $\sin^n x \neq 0$, $P_n(\cot^2 x) = 0$ si, et seulement si, $\sin nx = 0$, donc si, et seulement si, $x = \dfrac{k\pi}{n}$ pour $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, le choix de k étant limité par l'appartenance de x à $]\,0\,;\,\pi/2\,[$. Comme cot est positive et strictement décroissante sur $]\,0\,;\,\pi/2\,[$, les p nombres $\cot^2\dfrac{k\pi}{n}$ sont deux à deux distincts.
Comme P_n est de degré p, il a au plus p racines distinctes, et comme nous connaissons déjà p racines distinctes de P_n, nous tenons toutes les racines de P_n : ce sont exactement les p nombres réels $x_k = \cot^2\dfrac{k\pi}{n}$ pour k décrivant $[\![1\,;\,p]\!]$.

c) Le coefficient dominant de P_n étant $\dbinom{n}{1} = n$, nous pouvons écrire :
$$P_n(X) = n\prod_{k=1}^{p}(X - x_k) = n\left(X^p - (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)X^{p-1} + \ldots\right).$$
Par unicité des coefficients : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k = -\frac{\binom{n}{3}}{3} = -\frac{(n-1)(n-2)}{6} = \frac{2p(2p-1)}{6}$, et

finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}.}$

2. $y = x$ est l'équation de la tangente commune aux courbes de sin et de tan à l'origine, or sin et tan sont respectivement concave et convexe sur $[\,0\,;\,\pi/2\,[$, d'où l'encadrement demandé.

3. **a)** En passant aux inverses et en élevant au carrés (tous les nombres intervenants étant positifs) : $\forall x\,]\,0\,;\,\pi/2\,[,\quad \dfrac{1}{\sin^2 x} \geqslant \dfrac{1}{x^2} \geqslant \cot^2 x$,
et comme $\dfrac{1}{\sin^2} = 1 + \cot^2 x$, $\quad\forall x\,]\,0\,;\,\pi/2\,[,\quad 1 + \cot^2 x \geqslant \dfrac{1}{x^2} \geqslant \cot^2 x.$
En appliquant cet encadrement à chaque x_k et en sommant, on a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k \leqslant \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant p + \sum_{k=1}^{p} x_k$. Et d'après 1.c) et isolant $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}$,
$$\frac{p(2p-1)}{3}\frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant \left(\frac{p(2p-1)}{3} + p\right)\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}.$$

b) Le majorant et le minorant de l'encadrement précédent tendent tous les deux vers $\dfrac{\pi^2}{6}$, donc par encadrement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall t \in [\,k\,;\,k+1\,],\ \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$.

Par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$. En sommant ces encadrements de 1 à n :
$$S_n - 1 + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant S_n, \text{ d'où}$$
$$\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant S_n \leqslant \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$
Pour $\alpha = 1$: $\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \dfrac{1}{(n+1)}$ et on montre
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$
Pour $\alpha \neq 1$:
$$\frac{1}{(1-\alpha)(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} + 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$
$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1,\ \frac{1}{\alpha-1} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + 1.}$$
$$\boxed{\text{Si } \alpha < 1,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ (notez que } 1-\alpha > 0.}$$