Soit p un entier naturel au moins égal à 2. Dans ce problème, je vous propose d'étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre p

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+p} = \frac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}).$$

Autrement dit, chaque terme à partir du rang $p+1$ est la moyenne des p termes précédents.

On pose : $\mathrm{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = \dfrac{1}{p}(u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1})\}$.

Partie I. *Un cas connu : p=2.*

Dans cette partie, on étudie le cas $p = 2$.

1. Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n.

2. En déduire que u converge, en précisant sa limite en fonction de u_1 et u_2.

Partie II. *Un peu d'analyse pour établir la convergence des suites u de E.*

Soit u une suite de E.

Pour tout $n \geqslant p$, on pose :

$m_n = \min(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p+1})$ et $\mathrm{M}_n = \max(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p+1})$.

1. **a)** Justifier que les suites m et M sont bornées.

b) En déduire qu'elles sont convergentes.
On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} m_n$ et $\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{M}_n$.

c) Comparer ℓ et L.

2. **a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant p+1$,

$$u_n \leqslant \frac{m_{n-1} + (p-1)\mathrm{M}_{n-1}}{p}.$$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \mathrm{M}_{np}$.
Justifier qu'il existe une application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(n) = +\infty \text{ et } v_n = u_{\sigma(n)}.$$

c) En déduire :

$$\mathrm{L} \leqslant \frac{\ell + (p-1)\mathrm{L}}{p}.$$

d) Montrer finalement que $\ell = \mathrm{L}$. Comment peut-on qualifier les suites m et M ?

3. Déduire des questions précédentes la convergence de u.

Partie III. *Un peu d'algèbre pour déterminer leur limite.*

1. *E en tant qu'espace vectoriel.*

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

b) Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathrm{E} & \to & \mathbb{R}^p \\ & u & \mapsto & (u_1, u_2, \ldots, u_p) \end{array}$$

est un isomorphisme.

c) En déduire la dimension de E.
On définit, pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, la suite $u^{(i)}$ de E par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,p]\!], u_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

d) Montrer que $(u^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une base de E. *On pourra exploiter l'isomorphisme ϕ.*

2. *La limite comme forme linéaire sur E.*
On pose :

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \mathrm{E} & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{S} : & \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ & u & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array}.$$

a) Justifier que Λ est une forme linéaire sur E, que $\mathcal{S}$ un endomorphisme de E, et que $\Lambda \circ \mathcal{S} = \Lambda$.

b) On note $\mathbb{1}$ la suite constante égale à 1. S'assurer que $\mathbb{1}$ est dans E et donner $\Lambda(\mathbb{1})$.

c) Pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, on pose : $\ell_i = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(i)}$.

Justifier que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ell_i = 1$.

d) Exprimer $\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(1)})$ en fonction de $\mathbb{1}$ et $u^{(p)}$, et en déduire $\ell_1 = \dfrac{1}{p}\ell_p$.

e) Pour i dans $[\![2\,;\,p-1]\!]$ et exprimer $\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(i)})$ en fonction de $\mathbb{1}$, $u^{(i-1)}$ et $u^{(p)}$, et en déduire une expression de ℓ_i en fonction de ℓ_{i-1} et ℓ_p.

f) En déduire, pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, ℓ_i en fonction de i et p.

3. *Synthèse des résultats précédents.*
Déterminer, pour toute suite u de E, $\lim u$ en fonction de ses p premiers termes.