Partie I. *Un cas connu : p=2.*

L'équation caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est $2x^2 = x+1$, dont les solutions sont 1 et $-1/2$. Il existe α et β réels tels que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \alpha + (-1/2)^n\beta$. Cette relation aux rangs 1 et2 fournit un système dont les solutions sont $\alpha = (u_1+2u_2)/3$ et $\beta = 4(u_2-u_1)/3$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_1}{3}\left(1-4\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) + \frac{2u_2}{3}\left(1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2.$$

Partie II. *Un peu d'analyse pour établir la convergence des suites u de E.*

1. **a)** Comme la moyenne de p nombres est comprise entre le plus petit et le plus grand de ces p nombres, une récurrence immédiate assure que : $\forall n \in [[p, +\infty[[, m_p \leqslant m_n \leqslant \mathrm{M}_n \leqslant \mathrm{M}_p$, donc m et M sont bornées.

b) Pour la raison invoquée ci-dessus, $u_{n+1} \geqslant m_n$. Et comme $m_n = \min(u_n, \dots, u_{n_p+1})$, m_n est inférieur à $u_n, \dots, u_{n-p+2}$. comme $m_{n+1} = \min(u_{n+1}, \dots, u_{n_p+2})$, $m_{n+1} \geqslant m_n$: la suite m est croissante. On justifie de même que la suite M est décroissante. Ces deux suites étant bornées, elles convergent.

c) Comme $\forall n \geqslant p$, $m_n \leqslant \mathrm{M}_n$, on a $\ell \leqslant \mathrm{L}$.

2. **a)** $u_n = \dfrac{u_{n-1} + \cdots + u_{n-p}}{p}$. En majorant les $p-1$ plus grands termes du numérateur par M_{n-1}, le plus petit étant m_{n-1}, on obtient la majoration $u_n \leqslant \dfrac{m_{n-1} + (p-1)\mathrm{M}_{n-1}}{p}$ (si plusieurs termes valent m_{n-1}, on en conserve un et on majore les autres).

b) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n) = k \in [\![(n-1)p+1\,;\, np]\!]$ tel que $\mathrm{M}_{np} = u_k$. On a par construction $v_n = \mathrm{M}_{np} = u_{\sigma(n)}$, et comme $\sigma(n) \geqslant (n-1)p$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma(n) = +\infty$.

c) En appliquant II-2.a) à l'indice $\sigma(n)$, nous avons :

$\mathrm{M}_{np} = u_{\sigma(n)} \leqslant \dfrac{m_{\sigma(n)-1} + (p-1)\mathrm{M}_{\sigma(n)-1}}{p}$. Et en prolongeant cette inégalité en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, $\mathrm{L} \leqslant \dfrac{\ell + (p-1)\mathrm{L}}{p}$.

d) L'inégalité précédente donne : $\ell \geqslant \mathrm{L} - \dfrac{p-1}{p}\mathrm{L}$, i.e. $\ell \geqslant \mathrm{L}$. Comme $\ell \leqslant \mathrm{L}$ par II-1.c), $\ell = \mathrm{L}$. Les suites m et M sont manifestement adjacentes.

3. Comme $\forall n \geqslant p$, $m_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}_n$, par encadrement, u converge, vers $\ell (= \mathrm{L})$.

Partie III. *Un peu d'algèbre pour déterminer leur limite.*

1. **a)** On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

b) La linéarité de ϕ ne pose pas de souci.
De plus, si $u \in \mathrm{E}$ vérifie $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$, la relation de récurrence entraîne que u est la suite nulle. Autrement dit, $\mathrm{Ker}\phi = \{0\}$ et ϕ est injective.
Enfin, si $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, la suite définie par

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!], u_i = x_i \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = \left(\textstyle\sum_{n\leqslant i\leqslant n+p-1} u_i\right)/p$$

est une suite de E vérifiant $\phi(u) = (x_1, \dots, x_p)$. Donc ϕ est surjective.

c) E et $\mathbb{R}^p$ étant isomorphes, $\dim \mathrm{E} = \dim \mathbb{R}^p = p$.

d) On a, pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, $\phi(u^{(i)}) = e_i$, où e_i désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Par conséquent, $(u^{(i)})_{1\leqslant i\leqslant p}$ est l'image par l'isomorphisme ϕ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, donc est une base de E.

2. **a)** La linéarité de Λ est une propriété classique des limites. $\mathcal{S}$ est clairement linéaire, et si $u \in \mathrm{E}$, alors $\mathcal{S}(u) \in \mathrm{E}$ puisque $\mathcal{S}(u)$ vérifie évidemment la relation de récurrence. Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ assure que $\Lambda \circ \mathcal{S} = \Lambda$.

b) $\mathbb{1}$ vérifie la relation de récurrence définissant E puisqu'évidemment $1 = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} 1$.

$\Lambda(\mathbb{1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ell_i = \sum_{i=1}^{p} \Lambda(u^{(i)}) = \Lambda\left(\sum_{i=1}^{p} u^{(i)}\right) = \Lambda(\mathbb{1}) = 1$ puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u^{(i)} = \mathbb{1}$.

d) Soit $u = \mathbb{1} - u^{(1)}$ et $v = \mathcal{S}(u)$. On a $u_1 = 0$, $u_2 = \cdots = u_p = 1$ et $u_{p+1} = \dfrac{p-1}{p} = 1 - \dfrac{1}{p}$. Du coup : $v_1 = \cdots = v_{p-1} = 1$ et $v_p = 1 - \dfrac{1}{p}$, ce qui s'écrit $\mathcal{S}(u) = v = \mathbb{1} - \dfrac{1}{p}u^{(p)}$.

D'une part : $\Lambda(u) = \Lambda(\mathbb{1}) - \Lambda(u^{(1)}) = 1 - \ell_1$,
d'autre part $\Lambda(u) = \Lambda(\mathcal{S}(u)) = \Lambda(v) = \Lambda(\mathbb{1}) - \dfrac{1}{p}\Lambda(u^{(p)}) = 1 - \ell_p$. Donc $\ell_1 = \dfrac{1}{p}\ell_p$.

e) $\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(i)}) = \mathbb{1} - u^{(i-1)} - \dfrac{1}{p}u^{(p)}$. Et en exploitant $\Lambda(\mathcal{S}(\mathbb{1} - u^{(i)})) = \Lambda(\mathbb{1} - u^{(i)})$, il vient $1 - \ell_i = 1 - \ell_{i-1} - \dfrac{1}{p}\ell_p$, donc $\ell_i = \ell_{i-1} + \dfrac{1}{p}\ell_p$.

f) Les relations précédentes donne, pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, $\ell_i = \dfrac{i}{p}\ell_p$.

Par 2.c), $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{i}{p}\ell_p = \frac{p(p+1)}{2p}\ell_p$ d'où $\ell_p = \dfrac{2}{p+1}$, et finalement $\forall i \in [\![1\,;\,p]\!]$, $\quad \ell_i = \dfrac{2i}{p(p+1)}$.

3. Soit $u \in \mathrm{E}$. Nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \Lambda(u) = \Lambda\left(\sum_{k=1}^{p} u_k u^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{p} u_k \Lambda(u^{(k)}) = \sum_{k=1}^{p} u_k \ell_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{2ku_k}{p(p+1)}.$$

Remarque : ceci confirme la réponse à la partie I, dans le cas $p = 2$.