Question préliminaire.
Soit s un entier de $[\![0\,;\,n]\!]$ et U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![s\,;\,n]\!]$.
Que vaut l'espérance de U ?

On dispose d'un dé à n faces numérotées de 1 à n, où n est un entier naturel *pair* au moins égal à 4. On suppose le dé juste. Soit N un entier naturel non nul.

Un joueur lance le dé au moins une fois et au maximum N fois. Après chaque lancer, le joueur a le droit de décider d'arrêter de lancer le dé. Le score du joueur est égal au numéro obtenu lors de son dernier lancer.

Par exemple, pour un dé à 6 faces, si le joueur a obtenu 1 à son premier jet, il a tout intérêt à relancer le dé, tandis que s'il a obtenu 6, son intérêt est de ne plus lancer le dé. Mais quelle stratégie doit-il adopter s'il obtient 4 ?

Le but de cet exercice est d'étudier deux stratégies optimisant l'espérance du score du joueur.

On note :
- D_i le numéro obtenu lors du $i^{\text{ème}}$ lancer ;
- X_N le score final du joueur.
- E_N l'espérance de X_N lorsque le joueur applique la stratégie qui maximise $\mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})$.

1. *Le cas trivial N=1.*
Le cas $\mathrm{N} = 1$ ne laissant aucun choix au joueur, préciser la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$ et de E_1.

Partie I. *Stratégie à seuil fixe.*

Dans cette partie de l'exercice, le joueur se fixe un nombre s dans $[\![1\,;\,n]\!]$ qu'on appellera seuil, puis applique la stratégie suivante :

☞ il lance le dé et s'arrête dès que le numéro obtenu atteint ou dépasse s ;

☞ si à l'issue du $\mathrm{N}^{\text{ème}}$ lancer le seuil s_N n'a pas été atteint, alors le joueur s'arrête (contraint par la règle du jeu) et son score est le numéro obtenu au $\mathrm{N}^{\text{ème}}$ lancer.

1. *Loi de* X_N.

a) Montrer que pour j dans $[\![1\,;\,s-1]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_\mathrm{N} = j) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{s-1}{n}\right)^{\mathrm{N}-1}$.

b) Montrer que pour j dans $[\![s\,;\,n]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{X}_\mathrm{N} = j) = \dfrac{1-\left(\dfrac{s-1}{n}\right)^{\mathrm{N}}}{n-s+1}$.

2. *Espérance de* X_N.

a) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N}) = \dfrac{n+s}{2} - \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{s-1}{n}\right)^{\mathrm{N}}$.

b) Que vaut $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})$?

3. *Détermination du seuil optimal.*
Déterminer, en fonction de n et de N, s dans $[\,1\,;\,n\,]$ pour que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_\mathrm{N})$ soit maximale. On note s_{max} cette valeur.

4. *Étude du cas N=2.*

a) Justifier que lorsque $\mathrm{N} = 2$, s_{max} est un entier.
Le joueur peut donc choisir s_{max} comme valeur de seuil.

b) Exprimer E_2 en fonction de n.

5. *Étude du cas N=3 et n =6.*
Dans cette question, on suppose que le joueur lance au plus 3 fois un dé cubique.

a) Calculer s_{max} et justifier que le seuil optimisant cette stratégie est 4 ou 5.

b) Quel est le meilleur choix pour s ? Que vaut E_3 ? Justifier.

6. *Mise en œuvre informatique.*

a) Écrire en Turbo-Pascal une fonction `smax`, dont les arguments sont N et n, qui calcule s_{max}.

b) Écrire en Turbo-Pascal une fonction `s`, dont les arguments sont N et n, qui calcule le seuil s optimisant le gain du joueur.

PARTIE II. ***Stratégie à seuils variables.***

Dans cette partie de l'exercice, le joueur se dit que le seuil optimal dépend du nombre de lancers restant à effectuer, et qu'il peut par exemple exiger un seuil plus élevé lorsqu'il lui reste cinq lancers que lorsqu'il ne lui en reste plus que deux.

1. *Étude du cas N=2.*

Le joueur se fixe un seuil s dans $[\![1\,;\,n]\!]$.

Si $\mathrm{D}_1 \geqslant s$, le joueur conserve le numéro obtenu au premier jet et ne relance pas le dé.

Si $\mathrm{D}_1 < s$, le joueur lance le dé une seconde fois.

a) Justifier que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2|[\mathrm{D}_1 \geqslant s]) = \dfrac{s+n}{2}$. Que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2|[\mathrm{D}_1 < s])$?

b) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2) = \dfrac{1}{2n}\left(-s^2+(n+2)s+n^2-1\right)$.

c) Déterminer s en fonction de n pour que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2)$ soit maximale. En déduire E_2.

2. *Étude du cas général par récurrence sur N.*

On suppose la stratégie optimale connue lorsque le joueur a le droit de lancer le dé au plus N fois, et on cherche la stratégie optimale lorsque le joueur a le droit de lancer le dé au plus N + 1 fois. En particulier, on supppose E_N connue.

Le joueur se fixe un seuil s dans $[\![1\,;\,n]\!]$.

Si $\mathrm{D}_1 \geqslant s$, le joueur conserve le numéro obtenu au premier jet et ne relance pas le dé.

Si $\mathrm{D}_1 < s$, le joueur décide de relancer le dé.

a) Que valent $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1}|[\mathrm{D}_1 \geqslant s])$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1}|[\mathrm{D}_1 < s])$?

b) En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1}) = \dfrac{(n-s+1)(n+s)}{2n} + \dfrac{s-1}{n}\mathrm{E}_\mathrm{N}$.

c) Vérifier que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1}) = \dfrac{1}{2n}\left(-\left(s-\left(\mathrm{E}_\mathrm{N}+\dfrac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\mathrm{E}_\mathrm{N}-\dfrac{1}{2}\right)^2+n(n+1)\right)$.

d) Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{X}_{\mathrm{N}+1})$ est maximale si, et seulement si s appartient à $[\,\mathrm{E}_\mathrm{N}\,;\,\mathrm{E}_\mathrm{N}+1\,]$.

e) Le seuil s est-il nécessairement unique ?

3. *Convergence de la suite* $(\mathrm{E}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$.

a) On pose $s_\mathrm{N} = \mathrm{Ent}(\mathrm{E}_\mathrm{N})+1$, où $\mathrm{Ent}(\alpha)$ désigne la partie entière du réel α.

Justifier que pour tout entier N non nul,

$$\mathrm{E}_{\mathrm{N}+1} = \frac{(n-s_\mathrm{N}+1)(n+s_\mathrm{N})}{2n} + \frac{s_\mathrm{N}-1}{n}\mathrm{E}_\mathrm{N} \qquad (\heartsuit).$$

b) Justifier que, pour tout entier N non nul, $\mathrm{E}_\mathrm{N} < n$ et $\mathrm{E}_\mathrm{N} < s_\mathrm{N} \leqslant n$.

c) En déduire que les suites $(\mathrm{E}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ convergent.

d) On note ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $(\mathrm{E}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$. Donner, à l'aide de la relation $(\heartsuit)$, une relation entre ℓ et ℓ'.

e) Justifier que $\ell \geqslant \ell'$. On pourra supposer $\ell < \ell'$ et aboutir à une contradiction en minorant $n+\ell'$.

f) En deduire que $\ell = \ell'$.

g) Montrer enfin que la limite commune des suites $(\mathrm{E}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ est n.

h) Interpréter ce dernier résultat.

4. *Cas d'un dé cubique.*

Le joueur utilise un dé à 6 faces qu'il a le droit de lancer au plus 3 fois.

a) Décrire une stratégie qui permet d'optimiser l'espérance du score X_3 et préciser la valeur de E_3.

b) Cette stratégie est-elle unique ?

5. *Cas d'un dé icosaèdrique.*

Le joueur utilise un dé à 20 faces qu'il a le droit de lancer au plus 3 fois.

a) Décrire une stratégie qui permet d'optimiser l'espérance du score X_3 et préciser la valeur de E_3.

b) Cette stratégie est-elle unique ?

6. *Mise en œuvre informatique.*

a) Écrire en TURBO-PASCAL une fonction `espoir`, dont les arguments sont E_N et n, qui calcule $\mathrm{E}_{\mathrm{N}+1}$.

b) Expliquer comment le joueur peut utiliser cette fonction pour définir une stratégie optimisant son score.