

EMLYON 2006 ET COMPLÉMENTS

Dans ce devoir, on traite un problème donné à l'EM en 2006 puis deux applications classiques (parties II & III) qui ne figuraient pas dans le sujet initial.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n , la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.

On note $f^0 = id$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

PARTIE I. Le problème EM-Lyon 2006

1. a) Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
 b) En déduire : $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0id$.
 a) Vérifier : $g(e_1) = 0$.
 b) Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
 c) En déduire : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.
 d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .
Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.
 e) Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .
3. a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
 On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0id + \alpha_1f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.

Calculer $Q(f)(e_1)$.

- b) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f .
 - c) Soit λ une racine du polynôme P .
 Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
 Vérifier que $(f - \lambda id) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.
 - d) Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .
Ce qui est pratique dans un livre, c'est que les pages sont numérotées et ordonnées. Dans l'ensemble, ça facilite la lecture.
4. a) Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.
 b) En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.
 5. a) *Application 2* : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
 b) *Application 3* : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.
 6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C .
 a) Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.
 b) En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.
 c) Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
 d) On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes. L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.
- a) Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
- b) Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .

PARTIE II. Application à la localisation des racines d'un polynôme.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad \rho = \max(r_1, \dots, r_n) \text{ et } \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \rho\}.$$

Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur propre associé à λ . Montrer que pour tout entier i de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|$.
- Démontrer que : $\text{Sp}(A) \subset \mathcal{D}$.
- Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.
- Soit $Q = b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n . Proposer un majorant du module de ses racines.
- Application :*
Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

PARTIE III. Applications aux suites récurrentes linéaires.

On note $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E , on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u .

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$ de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \cdots - a_0u(n).$$

- Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F .
- Soit φ l'application de F vers $\mathbb{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?
- Pour tout entier $0 \leq i \leq p-1$ on définit les éléments e_i de F par :
$$e_i(i) = 1 \quad \text{et, lorsque } 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } j \neq i, e_i(j) = 0.$$

a) Déterminer, pour tout i dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $e_i(p)$.

b) Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est une base de F .

c) Soit u un élément de F , établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

- Si u est un élément de E , on définit l'élément $f(u)$ de E par :

$$f(u) : n \mapsto u(n+1).$$

Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f .

- Si g est l'endomorphisme de F induit par f , montrer que la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$ est tC_P .
- On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$.
- Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g .
- En déduire que, si u est élément de F , il existe des constantes complexes $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \cdots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n.$$

- Exemple :* (On revient à la notation usuelle u_n)

Soit a, b et c trois réels distincts.

Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc u_n.$$