Partie I. ***Application à la localisation des racines d'un polynôme.***

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ et $\mathrm{X} = \big(x_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur propre associé à λ.

La $i^{\text{ème}}$ ligne de la relation $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$ donne $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$.

Majorons alors grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_j |a_{i,j}x_j| \leqslant \sum_j |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \sum_j |a_{i,j}|\,||\mathrm{X}|| \leqslant r_i\,||\mathrm{X}||\,.$$

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$ et $\mathrm{X} = \big(x_i\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un vecteur propre associé à λ (donc $\mathrm{X} \neq 0$).
Pour tout i, $|\lambda|\,|x_i| \leqslant |\lambda x_i| \leqslant r_i\,||\mathrm{X}|| \leqslant \rho\,||\mathrm{X}||$.
Donc $|\lambda|\max_i |x_i| \leqslant \rho\,||\mathrm{X}||$, i.e. $|\lambda|\,||\mathrm{X}|| \leqslant \rho\,||\mathrm{X}||$.
Et comme $||\mathrm{X}|| > 0$, $\lambda \leqslant \rho$. Donc $\rho \in \mathcal{D}$. Ainsi $\mathrm{Sp(A)} \subset \mathcal{D}$.

3. Appliquons 2) à $\mathrm{A} = \mathrm{C_P}$, on a :

- $r_1 = |a_0|$, et $\forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,, r_i = 1 + |a_{i-1}|$;
- $\rho = \max\{|a_0|\,, 1+|a_1|\,, 1+|a_2|\,,\dots, 1+|a_{n-1}|\} = \mathrm{R}$.

Donc $\mathrm{Sp(C_P)} \subset \mathcal{D}(0,\mathrm{R})$, disque fermé de centre 0 et de rayon R.
Or les racines de P sont exactement les valeurs propres de $\mathrm{C_P}$. Donc toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\mathrm{R} = \max\{|a_0|\,, 1+|a_1|\,, 1+|a_2|\,,\dots, 1+|a_{n-1}|\}$.

4. Comme Q est de degré n, b_n est non nul. Posons
$\mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{b_n}\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + \dfrac{b_{n-1}}{b_n} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_n}$.
Les racines de Q sont exactement les racines de P, auxquelles nous pouvons appliquer 3). Ainsi les racines de Q sont toutes dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\max\{\left|\dfrac{b_0}{b_n}\right|, 1+\left|\dfrac{b_1}{b_n}\right|,\dots, 1+\left|\dfrac{b_{n-1}}{b_n}\right|\}$.
Moralité (de cette partie) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout polynôme } \mathrm{Q} = b_n\mathrm{X}^n + b_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + b_0 \text{ de degré } n \text{ de } \mathbb{C}[\mathrm{X}],\\ \mathrm{Q}(\lambda) = 0 \Rightarrow |\lambda| \leqslant \max\left\{\left|\dfrac{b_0}{b_n}\right|, 1+\left|\dfrac{b_1}{b_n}\right|,\dots, 1+\left|\dfrac{b_{n-1}}{b_n}\right|\right\}.\end{array}}$$

5. *Application :*
Supposons, sans perdre de généralité, que a est le plus grand des 4 entiers naturels a, b, c, d.
Soit $\mathrm{P} \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{X}^a + \mathrm{X}^b - \mathrm{X}^c - \mathrm{X}^d$ (où l'on n'a pas nécessairement $b > c > d\,!$).
En appliquant les résultats précédents, on a : $\mathrm{P}(n) = 0 \Rightarrow |n| \leqslant 2$. Comme on suppose $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, la seule racine entière naturelle possible est 2.
Or : $\mathrm{P}(2) = 0 \Rightarrow 2^a + 2^b = 2^c + 2^d$. L'unicité de l'écriture des entiers en base 2 impose alors, puisque $a > b$, $a = max(c,d)$ et $b = min(c,d)$. Ceci est impossible puisque a, b, c et d sont deux à deux distincts.
Raisonnement alternatif : Supposons pour fixer les idées que $c > d$.
$\mathrm{P}(2) = 0 \Rightarrow 2^b(1+2^{a-b}) = 2^d(1+2^{c-d}) \Rightarrow 2^{b-d}(1+2^{a-b}) = (1+2^{c-d})$. En observant que les deux parenthèses sont des nombres entiers impairs, cela impose $b = d$, car si $b > d$, le membre de gauche est pair, et si $b < d$, le membre de gauche n'est pas entier ! Enfin, par hypothèse, $b = d$ est impossible.

PARTIE II. ***Applications aux suites récurrentes linéaires.***

1. Remplaçons $u(n)$ par λ^n : on a bien $\lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \ldots + a_0\lambda^n = 0$ dès que $\mathrm{P}(\lambda) = 0$. Cqfd (la réciproque est fausse, par exemple quand $a_0 = \lambda = 0$).

2. Tout d'abord, φ est linéaire (ses composantes sont des formes linéaires ...).
Ensuite, c'est une bijection, car chacune des suites élément de F est uniquement et entièrement déterminée par des p premières valeurs, compte tenu de la relation de récurrence.
Donc F, isomorphe à $\mathbb{C}^p$, est de dimension p.

3. **a)** $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0e_i(0) = -a_i$.

b) Les e_i sont l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1}.

c) La suite u et la suite $\sum\limits_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ sont deux éléments de F qui commencent par les p mêmes termes, à savoir $\varphi(u) = (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$.
Elles sont donc identiques : les termes ultérieurs suivent par récurrence.

4. $f(u + \lambda v)$ est par définition la suite de terme général

$$(u + \lambda v)(n+1) = u(n+1) + \lambda v(n+1)$$

C'est donc $f(u) + \lambda f(v)$ ce qui prouve la linéarité de f : ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
Enfin, la relation de récurrence qui définit F devant être vraie pour tout n sera vraie pour tout $n+1$! (la réciproque n'est PAS vraie...) ce qui signifie que $f(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, *ie* que F est stable par F.

5. Cela résulte de **II.3a)** : en effet, $e_i(p) = -a_i$ et donc

$$f(e_i) = (0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,-a_i,\ldots) \quad \text{et} \quad \varphi(f(e_i)) = (0,0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,-a_i)$$

En écrivant ceci en colonnes pour $i = 0\ldots p-1$, on obtient la matrice de f dans la base (e_i) et on reconnaît ${}^t\mathrm{C}_\mathrm{P}$.

6. **a)** D'après les rappels préliminaires, ${}^t\mathrm{C}_\mathrm{P}$ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est donnée par les colonnes de $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_0 & \ldots & \lambda_{p-1} \\ \ddots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$.

b) Tout élément de F s'écrit dans cette base qui est constituée de suites géométriques (cf. **II.1**) autrement dit cela ne s'arrête pas à l'exposant $p-1$, mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u(n) = k_0\lambda_0^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^{p-1}$$

où les k_i sont tout simplement les coordonnées de u dans la base (e_i).

7. Les racines de $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^3 - (a+b+c)\mathrm{X}^2 + (ab+bc+ca)\mathrm{X} - abc$ sont a, b et c.
Ces réels étant supposés distincts, tout est fini : une base de l'espace F est constituée par les trois suites géométriques $(a^n), (b^n), (c^n)$ et tout élément de F s'écrit

$$u_n = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n$$

où α, β, γ sont fonction des valeurs initiales u_0, u_1, u_2 (la matrice de passage entre ces paramètres étant de la forme V, cf. supra).