D'après EDHEC 1998

Dans tout le l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1.

On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par : $Q = (X-1)P' - XP''$.

Partie I. *Préliminaire.*

Soit k un entier naturel non nul. On note f_k la fonction réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k e^{-x}.$$

1. a) Montrer que :

$$\forall j \in [\![0\,;\,k]\!], \forall x \in \mathbb{R}\ , f_k^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i \frac{k!}{(k-j+i)!} e^{-x} x^{k-j+i}.$$

b) En déduire que, pour $j \in [\![0\,;\,k-1]\!]$, $f_k^{(j)}(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k^{(j)}(x) = 0$.

Partie II. *Étude de φ.*

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour tout j élément de $[\![0\,;\,n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$.

c) Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.

d) En déduire que φ est diagonalisable.

2. Pour tout k élément de $[\![0\,;\,n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$ et on écrit $L_k = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i$, avec $a_p = 1$.

a) Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k.

b) Déterminer L_0.

c) Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ sont solutions.

d) En déduire que : $\forall i \in [\![0\,;\,k]\!]$, $\quad a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!\binom{k}{i}^2$.

3. Montrer que : $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$.

Partie III. *Étude des racines de L_n.*

On rappelle que n désigne un entier naturel non nul.

1. Justifier que pour tout k de $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge et donner sa valeur.

2. a) Soit i un entier naturel et a et b deux réels. Montrer que :

$$\int_a^b t^i f_n^{(n)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(t^i\right)^{(j)} f_n^{(n-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b \left(t^i\right)^{(n)} f_n(t)dt.$$

b) En déduire : $\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $\int_0^{+\infty} t^i L_n(t) e^{-t} dt = 0$.

c) En déduire enfin : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_0^{+\infty} P(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0$.

3. On pose $R(x) = \prod\limits_{j=1}^{p} (x - x_j)$, où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n. On convient que $R(x) = 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}_+$.

4. On suppose dans cette question que $p < n$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} R(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0$.

b) En déduire que RL_n est le polynôme nul.

5. a) En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que $p = n$.

b) En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.