

D'APRÈS EDHEC 1998

1. *Question préliminaire* : Si la série de terme général x_n converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq x_n \leq 1$, donc $0 \leq x_n^2 \leq x_n$. La règle de comparaison des séries à termes positifs permet de conclure que la série de terme général x_n^2 .

2. ch est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et est paire. $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Pour $x \in]0; +\infty[$, $e^x > e^{-x}$, donc ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Notons enfin que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$ et $\text{ch}(0) = 1$.

3. Notons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}''(x) = \text{ch}(x)$, donc $\text{ch}''(0) = \text{ch}(0) = 1$ et $\text{ch}'(0) = 0$. Ce qui conduit au développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0 donné par la formule de Taylor-Young :

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

4. a) Par une récurrence immédiate, la suite (u_n) est strictement positive.

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\text{ch}(u_n)} < 1$ car $u_n > 0$ entraîne que $\text{ch}(u_n) > 1$. Donc (u_n) est strictement décroissante.

- b) (u_n) est décroissante minorée (par 0), donc (u_n) est convergente. Soit

ℓ sa limite. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)}$, donc

$$\ell = \frac{\ell}{\text{ch}(\ell)} \text{ donc } \text{ch}(\ell) = 1 \text{ donc } \ell = 0. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

5. a) (u_n) étant strictement décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc

(v_n) est strictement négative.

- b) $v_n = \frac{1}{\text{ch}(u_n)} - 1$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ch}(u_n) = \text{ch}(0) = 1$. Donc

(v_n) est convergente de limite nulle.

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_0) \text{ après un joyeux télescopage. Donc, comme } \ln(u_0) = \ln(1) = 0, \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k) = \ln(u_n).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 + v_k) = -\infty$ donc la série de terme général $\ln(1 + v_n)$ diverge. Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, $\ln(1 + v_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Comme ces termes généraux sont de signe constant (négatif), la règle des équivalents entraîne que les séries sont de même nature, donc divergentes.

La série de terme général v_n est divergente.

6. a) $v_n = \frac{1}{\text{ch}(u_n)} - 1 = \frac{1 - \text{ch}(u_n)}{\text{ch}(u_n)}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, $\text{ch}(u_n) = 1 + \frac{u_n^2}{2} + o\left(\frac{u_n^2}{2}\right)$ donc $1 - \text{ch}(u_n) = -\frac{u_n^2}{2} + o\left(\frac{u_n^2}{2}\right)$ et $1 - \text{ch}(u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{u_n^2}{2}$. Comme de plus $\text{ch}(u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$, on obtient $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{u_n^2}{2}$.

- b) Par la règle des équivalents (les termes généraux étant de signe constant), les séries $\sum_{n \geq 0} -\frac{u_n^2}{2}$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature donc divergentes. Par linéarité, la série de terme général u_n^2 est divergente.

- c) La suite (u_n) est strictement positive. D'après le préliminaire, si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ convergerait, la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ convergerait. Or ce n'est pas le cas. Donc la série de terme général u_n diverge.

EXERCICE 1. EDHEC 1998

1. a) f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, f est paire.

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{2} \Gamma(1) = \frac{1}{2} 0! = \frac{1}{2}.$$

Par parité, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut $2 \times \frac{1}{2} = 1$. Donc

f est bien une densité de probabilité.

b) Si $x < 0$, $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^t}{2} \right]_A^x = \frac{e^x}{2}.$

Si $x \geq 0$, $F_Z(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^t}{2} \right]_A^0 + \left[\frac{-e^{-t}}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{-e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e^{-x}}{2}.$

$$F_Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x}{2} & \text{si } x \in x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $V(\Omega) = \mathbb{R}$. Comme Z_1 et Z_2 sont deux variables à densité indépendantes de densité f , étudions $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)dt$. $h(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-|x-t|} dt$. Pour évacuer les valeurs absolues, remarquons que : $|t| = t \iff t \geq 0$ et $|x-t| = x-t \iff x \geq t$.

Si $x < 0$, $h(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^x e^t e^{-x+t} dt + \frac{1}{4} \int_x^0 e^t e^{x-t} dt + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{x-t} dt = \frac{e^{-x}}{4} \int_{-\infty}^x e^{2t} dt + \frac{e^x}{4} \int_x^0 1 dt + \frac{e^x}{4} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{-x} e^{2x}}{2} - x e^x + \frac{e^x}{2} \right) = \frac{1-x}{4} e^x$

Si $x \geq 0$, $h(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^t e^{-x+t} dt + \frac{1}{4} \int_0^x e^{-t} e^{-x+t} dt + \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{x-t} dt = \frac{e^{-x}}{4} \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \frac{e^{-x}}{4} \int_0^x 1 dt + \frac{e^x}{4} \int_x^{+\infty} e^{-2t} dt =$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{e^{-x}}{2} + x e^{-x} + \frac{e^x e^{-2x}}{2} \right) = \frac{1+x}{4} e^{-x}$$

La fonction h obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, donc

$$f_V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1+|x|}{4} e^{-|x|}.$$

2. a) $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $(-Y)(\Omega) = \mathbb{R}_-$. Pour $x \in \mathbb{R}_-$, $F_{-Y}(x) = \mathbb{P}(-Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq -x) = 1 - F_Y(-x) = 1 - (1 - e^{-(x)}) = e^x$. Par dérivation, $f_{(-Y)}(x) = e^x$.

$$F_{-Y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \in x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad x > 0 \text{ et } f_{-Y} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^x$$

b) $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Comme X et $-Y$ sont deux variables à densité indépendantes, étudions $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t) dt$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f_{-Y}(x-t) dt.$$

Si $x > t$, alors $x-t > 0$ et $f_{-Y}(x-t) = 0$. Sinon $f_{-Y}(x-t) = e^{x-t}$.

Si $x < 0$, alors $x < t$ et $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{x-t} dt = e^x \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{e^x}{2}.$

Si $x \geq 0$, alors $h(x) = \int_0^x e^{-t} \times 0 dt + \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{x-t} dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{e^x e^{-2x}}{2} = \frac{e^{-x}}{2}.$

La fonction h obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, et s'écrit $h(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$. Z suit la loi exponentielle bilatérale.

c) Par linéarité, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 1 - 1 = 0$, eh oui!

d) $Z(\Omega) = \mathbb{R}$ donc $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F_T(x) = \mathbb{P}(|Z| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq Z \leq x) = F_Z(x) - F_Z(-x) = 1 - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = 1 - e^{-x}$ (on a déterminé F_Z en 1.b)). T suit une loi exponentielle de paramètre 1.

EXERCICE 2. EDHEC 1998

PARTIE I. Préliminaire.

1. a) On calcule $f_k^{(j)}$ à l'aide de la formule de Leibniz. $f_k^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (e^{-x})^{(i)} (x^k)^{(j-i)}$. Or $(e^{-x})^{(i)} = (-1)^i (e^{-x})$, et $(x^k)^{(j-i)} = \frac{k!}{(k-(j-i))!} x^{k-(j-i)}$. Donc

$$f_k^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^i \frac{k!}{(k-j+i)!} e^{-x} x^{k-j+i}.$$

- b) Pour $0 \leq i \leq j \leq k-1$, $k-j+i \geq 1$ donc tous les termes x^{k-j+i} s'annule lorsque $x = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^{k-j+i} = 0$. Donc

$$\text{pour } j \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket, f_k^{(j)}(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k^{(j)}(x) = 0.$$

PARTIE II. Étude de φ .

1. a) $\varphi(aP_1 + P_2) = (X-1)(aP_1 + P_2)' - X(aP_1 + P_2) = a((X-1)P_1 - XP_1') + (X-2)P_2 - XP_2 = a\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$. $\deg XP' \leq \deg P$ et $\deg XP'' \leq \deg P - 1$. Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- b) $\varphi(X^j) = jX^j - j^2X^{j-1}$.

c)
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & -9 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n-1 & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

- d) M est triangulaire, $\text{Sp}(M) = \{0; 1; \dots; n-1; n\}$. M a $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, donc φ est diagonalisable.

2. a) $\varphi(L_k) = \sum_{i=0}^p a_i \varphi(X^i) = \sum_{i=0}^p a_i (iX^i - i^2X^{i-1}) = kL_k = k \sum_{i=0}^p a_i X^i$. Les coefficients dominants de ces sommes étant égaux, on a $pa_p = ka_p$. Avec $a_p = 1$, il vient $p = k$.

- b) $\varphi(1) = 0 = 0 \times 1$ donc $L_0 = 1$.

- c) $\varphi(L_k) = kL_k \iff \sum_{i=0}^k a_i (iX^i - i^2X^{i-1}) = k \sum_{i=0}^k a_i X^i \iff \sum_{i=0}^k a_i iX^i - \sum_{i=0}^k a_i i^2X^{i-1} = k \sum_{i=0}^k a_i X^i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} (i+1)^2 X^i = \sum_{i=0}^k a_i k X^i \iff \\ \begin{cases} ka_k = ka_k \\ (k-1)a_{k-1} - k^2a_k = ka_{k-1} \\ \vdots \\ ja_j - (j+1)^2a_{j+1} = ka_j \\ \vdots \\ a_1 - 2^2a_2 = ka_1 \\ -a_1 = ka_0 \end{cases} \iff \\ \begin{cases} a_k = 1 \quad (\text{car } L_k \text{ est unitaire.}) \\ a_{k-1} = -k^2a_k \\ \vdots \\ a_j = -\frac{(j+1)^2}{k-j}a_{j+1} \\ \vdots \\ a_0 = -\frac{1}{k}a_1 \end{cases} \end{array} \right.$$

- d) On alors démontre par une récurrence descendante sur $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$ que

$$a_i = (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i}^2.$$

Plus précisément, on montre la propriété pour $i = k$, puis on la suppose vraie à un rang quelconque i de $\llbracket 1; k \rrbracket$ pour démontrer qu'elle est alors vraie au rang $i - 1$. Il s'agit d'une *récurrence descendante finie*.

Essayez, ça marche tout seul !

3. $L_k(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} (k-i)! \binom{k}{i} x^i$. D'autre part,
- $$(-1)^k e^x f_k^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k+i} \frac{k!}{i!} x^i \text{ d'après la partie I. Comme}$$
- $$(-1)^{k-i} = (-1)^{k+i} \text{ et } \binom{k}{i} (k-i)! = \frac{k!}{i!}, \text{ ces deux expressions sont égales.}$$

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R} \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x).}$$

PARTIE III. Étude des racines de L_n .

1. $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge vaut $\Gamma(k+1) = k!$.
2. a) Soit i un entier naturel et a et b deux réels. Par récurrence sur $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on démontre, à l'aide d'intégrations par parties, que
- $$\int_a^b t^i f_n^{(n)}(t) dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j (t^i)^{(j)} f_n^{(n-j-1)}(t) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b (t^i)^{(k)} f_n^{(n-k)}(t) dt.$$
- Ce qui donne le résultat pour $k = n$.
- b) On a, pour $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $n-j-1 \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Par la partie I, on sait que $f_n^{(n-j-1)}(0) = 0$ et $\lim_{b \rightarrow +\infty} f_n^{(n-j-1)}(b) = 0$. En prenant $a = 0$ et b tendant vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient :
- $$\int_0^{+\infty} t^i f_n^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} (t^i)^{(n)} f_n(t) dt,$$
- or $n > i$ donc $(t^i)^{(n)} = 0$: la dernière intégrale est nulle. Enfin $t^i L_n(t) e^{-t} = t^i (-1)^n e^t f_n^{(n)}(t) e^{-t} = (-1)^n t^i f_n^{(n)}(t)$, donc

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \int_0^{+\infty} t^i L_n(t) e^{-t} dt = 0.}$$

- c) Tout P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est combinaison linéaire des X^i ($0 \leq i \leq n-1$), donc par linéarité de l'intégrale,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^{+\infty} P(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0.}$$

3. On raisonne sur $\mathbb{R}_+$, donc uniquement avec les racines positives. Les racines de RL_n sont les racines de L_n . Les racines d'ordre pair de L_n ne sont pas racines de R donc sont encore des racines d'ordre pair dans RL_n . Les racines d'ordre impair de L_n sont aussi racines d'ordre impair de R donc sont encore des racines d'ordre pair dans RL_n . RL_n n'a donc que des racines d'ordre pair, il est donc de signe constant, égal au signe de son coefficient dominant, qui vaut 1, donc positif.
- RL_n est positif sur $\mathbb{R}_+$.

4. a) $\int_0^{+\infty} R(t) L_n(t) e^{-t} dt = 0$ est une conséquence de 2.c) puisque $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $p = \deg R < n$.

- b) L'intégrale $\int_0^{+\infty} R(t) L_n(t) e^{-t} dt$ est l'intégrale d'une fonction continue positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme cette intégrale est nulle, $t \mapsto R(t) L_n(t) e^{-t}$ est la fonction nulle. Comme $\deg L_n = n$, L_n ne s'annule qu'au plus n fois, donc R a une infinité de racines. Donc RL_n est le polynôme nul.

5. a) Par définition, R n'est pas nul. Donc $p < n$ est impossible. Donc $p = n$.

- b) Puisque $p = n$, $\deg R = n$, R admet n racines distinctes positives qui par définition de R sont n racines distinctes positives de L_n . Comme $\deg L_n = n$, L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.