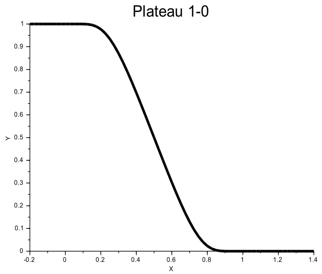
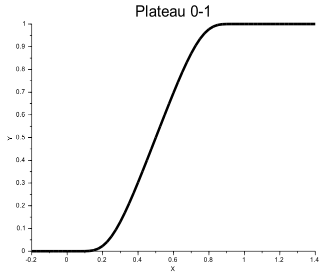
L'objectif de cet exercice est d'étudier les fonctions « plateau », fonctions qui sont constantes sur certains intervalles et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme celles représentées ci-dessous :

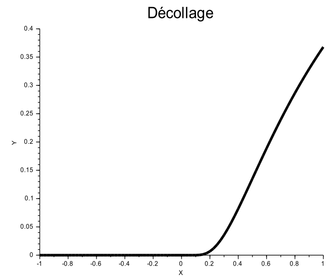




La difficulté essentielle est que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ aux « extrémités » des plateaux (aux points d'abscisse 0 et 1 sur les figures précédentes).

Partie I. *Une fonction décollage*

Dans cette partie, on étudie une fonction « décollage », constante sur un intervalle et strictement croissante au-delà, et toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme celle représentée ci-dessous :



On admet le théorème suivant :

> Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
> Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}^*$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et si $\lim\limits_{0} f^{(n+1)}$ existe et est finie, alors f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{0} f^{(n+1)}$.

1. *Première tentative*

Soit μ la fonction définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par

$$\mu(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que μ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais non de classe $\mathcal{C}^2$.

2. *Tentative monomiale*

Soit n un entier naturel non nul et ν la fonction définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par

$$\nu(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^n & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Quelle est la classe de ν sur $\mathbb{R}$?

3. *À l'aide de l'exponentielle*

Soit λ la fonction définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par

$$\lambda(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Justifier que λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, tel que

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \lambda^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

c) Montrer que λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en précisant la valeur de ses dérivées successives en 0.

d) Quel est le développement limité à l'ordre 2 015 de λ en 0 ?

e) Étudier les variations et les limites de λ sur $\mathbb{R}$, et justifier que λ est négligeable devant x^n en 0 pour tout entier naturel n.

f) Justifier que la courbe de λ possède une asymptote horizontale, dont on précisera l'équation, en $+\infty$.

g) Montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lambda(x) = 1 - \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

h) Étudier la convexité de λ

i) Compléter les lignes du script Scilab pour faire tracer la représentation graphique de λ sur $[-1\,;6]$:

```
function y=decoll(x)
    if x <= 0 then
```

```
        y=..........
    else
        y=..........
    end
endfunction

fplot2d(-1:0.025:6,decoll)
```

PARTIE II. *Exemples de fonctions « plateau »*

1. *Un plateau générique*

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\lambda(x)}{\lambda(x)+\lambda(1-x)}$$
Vérifier que :

a) F est effectivement définie sur $\mathbb{R}$,

b) F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,

c) $\forall x \leqslant 0, \quad \mathrm{F}(x)=0$, et, $\quad \forall x \geqslant 1, \quad \mathrm{F}(x)=1$,

d) F est strictement croissante sur $[\,0\,;\,1\,]$.

2. *Symétrie de la courbe*

Soit A le point de coordonnées $(1/2, 1/2)$.

a) Vérifier que, pour tout x réel, $\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{F}(1-x)$.

b) Montrer que, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, les points de coordonnées (x,y) et $(1-x,1-y)$ sont symétriques par rapport au point A, et en déduire que la courbe représentative de F est symétrique par rapport au point A.

3. *Représentation avec SCILAB*

On reproduira sur la copie les instructions `Scilab` utilisées.

a) Compléter le script SCILAB de la partie précédente en définissant la fonction F à l'aide de la fonction `decoll`.

b) Faire tracer la courbe de F sur l'intervalle $[\,-1\,;\,2\,]$.

4. *Généralisation*

Soit a, b, m et M quatre réels tels que $a<b$ et $m \neq \mathrm{M}$ (on ne suppose pas nécessairement $m<\mathrm{M}$).

Soit $\pi_{a,m,b,\mathrm{M}}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \pi_{a,m,b,\mathrm{M}}(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} m+(\mathrm{M}-m)\mathrm{F}\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$
Vérifier que :

a) $\pi_{a,m,b,\mathrm{M}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,

b) $\forall x \leqslant a, \quad \pi_{a,m,b,\mathrm{M}}(x)=m$, et, $\quad \forall x \geqslant b, \quad \pi_{a,m,b,\mathrm{M}}(x)=\mathrm{M}$,

c) $\pi_{a,m,b,\mathrm{M}}$ est strictement monotone sur $[\,a\,;\,b\,]$.

5. *Plateaux multiples*

a) À l'aide de la fonction F, définir une fonction g ayant les propriétés suivantes :

i. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$;

ii. g est nulle sur $]\,-\infty\,;\,0\,] \cup [\,3\,;\,+\infty\,[$ et vaut 1 sur $[\,1\,;\,2\,]$;

iii. g est strictement monotone sur les intervalles $[\,0\,;\,1\,]$ et $[\,2\,;\,3\,]$.

b) La courbe de g est-elle symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{3}{2}$?

c) Programmer g et faire tracer sa courbe représentative pour vérifier qu'elle satisfait les propriétés souhaitées.

PARTIE III. *Une variable aléatoire à densité*

1. *F fonction de répartition d'une v.a.r. X*

Montrer que F est une fonction de répartition de variable à densité.
Soit X une variable à densité admettant F pour fonction de répartition.
On note f la dérivée de F, de sorte que f est une densité de X.

2. *Médiane de X*

a) Justifier que, pour tout a de $]\,0\,;\,1\,[$, l'équation $\mathrm{F}(x)=a$, d'inconnue x, possède une unique solution réelle.

b) On appelle *médiane de X* tout réel m tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant m)=\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant m)$.
Montrer que X possède une unique médiane, et préciser sa valeur.

3. *Espérance de X*

a) Que valent $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$?

b) Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=f(1-x)$.

c) À l'aide du changement de variable $u=1-t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1/2} tf(t)\mathrm{d}t$, montrer que l'espérance de X vaut $1/2$.