Partie I. ***Une fonction décollage***

1. μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to 0}\mu(x) = 0 = \mu(0)$, donc μ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\mu'(x) = 0 = \lim\limits_{0\to\mu^+}(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\mu(x)$ existe et vaut 0.
D'après le théorème, μ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$\forall x < 0, \mu''(x) = 0$ et $\forall x > 0, \mu''(x) = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\mu''(x)$ n'existe pas. Donc μ'' n'est pas continue en 0, μ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. De la même façon qu'en 1), on montre par récurrence sur k que ν est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ pour tout k de $[\![1\,;\,n-1]\!]$.
$\forall x < 0, \nu^{(n)}(x) = 0$ et $\forall x > 0, \nu^{(n)}(x) = n!$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\nu^{(n)}(x)$ n'existe pas. Donc $\nu^{(n)}$ n'est pas continue en 0, ν n'est pas de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

3.a) Sur $]-\infty\,;\,0[$, λ est constante donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sur $]0\,;\,+\infty[$, λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition de $x\mapsto -1/x$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;\,+\infty[$ par exp $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Donc λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrons par récurrence sur n que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, tel que

$$\forall x\in\,]0\,;\,+\infty[,\quad \lambda^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Cette propriété est vraie pour $n=0$ en prenant $\mathrm{P}_0 = 1$.
Supposons cette propriété vraie pour un n fixé dans $\mathbb{N}$. Alors :
$\forall x>0, \lambda^{(n+1)}(x) = \dfrac{-1}{x^2}\mathrm{P}'_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x^2}\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$
$= \mathrm{P}_{n+1}\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ où $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2\big(\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) - \mathrm{P}'_n(\mathrm{X})\big)\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) On montre par récurrence sur n que λ est de classe $\mathcal{C}^n$ avec $\lambda^{(n)}(0) = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
En effet, on sait déjà que λ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\lambda(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\lambda(x) = 0 = \lambda(0)$ donc λ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$, avec $\lambda^{(0)} = 0$.
Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie à un rang n fixé. λ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur $\mathbb{R}^*$.
$\lim\limits_{x\to 0^-}\lambda^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}0 = 0$ et
$\lim\limits_{x\to 0^+}\lambda(n+1)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{P}_{n+1}(1/x)\exp(-1/x) = \lim\limits_{y\to+\infty}\mathrm{P}_{n+1}(y)\mathrm{e}^{-y} = 0$ par les croissances comparées.
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0}\lambda^{(n+1)}(x)$ existe et vaut 0.
D'après le théorème, λ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Ce qui achève la démonstration par récurrence.

d) Par le théorème de Taylor-Young, λ admet un développement limité à l'ordre 2 015 car λ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{2015}\frac{\lambda^{(k)}(0)}{k!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^{2015}\big) = 0 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^{2015}\big)$$

e) λ est constante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ ($\forall x>0$, $\lambda'(x) = 1/x^2\times\exp(-1/x) > 0$).
$\lim\limits_{x\to-\infty}\lambda(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda(x) = 1$.
Comme ci-dessus, pour tout n de $\mathbb{N}$, le développement limité de λ en 0 à l'ordre n est : $\lambda(x) = 0 + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, d'où $\lambda(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

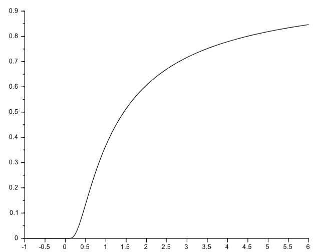
f) La courbe de λ possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ e, $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda(x) = 1$.

g) Comme $\exp(-u) = 1 - u + \underset{u\to 0}{o}(u)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, on a par composition $\lambda(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

h) $\forall x\leqslant 0$, $\lambda''(x) = 0$,
$\mathrm{P}_0 = 1$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 = \mathrm{X}^3(\mathrm{X}-2)$ donc
$\forall x>0$, $\lambda''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)\exp(-1/x) = \dfrac{1-2x}{x^4}\exp(-1/x)$ est du signe de $1-2x$.
Donc λ est convexe sur $]-\infty\,;\,1/2]$ et concave sur $[1/2\,;\,+\infty[$.

i)

```
function y=decoll(x)
    if x <= 0 then
        y=0
    else
        y=exp(-1/x)
    end
endfunction
fplot2d(-1:0.025:6,decoll)
```



Partie II. ***Exemples de fonctions « plateau »***

1. • Comme λ est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que le dénominateur de F ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ pour que F soit définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$\lambda(x) + \lambda(1-x) = 0 \Leftrightarrow (\lambda(x) = 0$ et $\lambda(1-x) = 0)$ car λ est positive,
$\Leftrightarrow (x\leqslant 0$ et $1-x\leqslant 0) \Leftrightarrow (x\leqslant 0$ et $1\leqslant x)$, ce qui est impossible.
• $\forall x\leqslant 0$, $\mathrm{F}(x) = 0$ car $\lambda(x) = 0$,
$\forall x\geqslant 1$, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\lambda(x)} = 1$ car $\lambda(1-x) = 0$.
• $\forall x\in\,]0\,;\,1[$,
$\mathrm{F}'(x) = \dfrac{\lambda'(x)\big(\lambda(x)+\lambda(1-x)\big) - \lambda(x)\big(\lambda'(x) - \lambda'(1-x)\big)}{\big(\lambda(x)+\lambda(1-x)\big)^2}$

$\mathrm{F}'(x) = \dfrac{\lambda'(x)\lambda(1-x)+\lambda(x)\lambda'(1-x)}{\big(\lambda(x)+\lambda(1-x)\big)^2} > 0$ car λ et λ' sont strictement positive sur $]\,0\,;1\,[$.

2. Soit A le point de coordonnées $(1/2, 1/2)$.

a) Pour tout x réel, $\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(1-x) = \dfrac{\lambda(x)}{\lambda(x)+\lambda(1-x)} + \dfrac{\lambda(1-x)}{\lambda(1-x)+\lambda(x)} = 1$.

b) Deux points $\mathrm{B}(x,y)$ et $\mathrm{C}(1-x, 1-y)$ sont symétriques par rapport à A si le milieu du segment [BC] est A.

Les coordonnées du milieu de [BC] sont $\dfrac{x+1-x}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{y+1-y}{2} = \dfrac{1}{2}$, donc le milieu de [BC] est bien A.

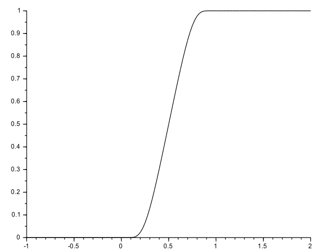
Soit $\mathrm{B}(x, \mathrm{F}(x))$ un point quelconque de la courbe de F. Son symétrique C par rapport à A a pour coordonnées $(1-x, 1-\mathrm{F}(x))$, c'est-à-dire $(1-x, \mathrm{F}(1-x))$. Donc C appartient aussi à la courbe de F.

La courbe représentative de F est bien symétrique par rapport au point A.

3.a)

```
function z=plato(t)
z=1-decoll(1-t)/(decoll(1-t)+decoll(t))
endfunction

fplot2d(-1:0.025:2,plato)
```



4.a) $\pi_{a,m,b,\mathrm{M}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par composition puisque F et $x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}$ le sont.

b) $\forall x \leqslant a, \quad \pi_{a,m,b,\mathrm{M}}(x) = m$ car $\mathrm{F}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = 0$ puisque $\dfrac{x-a}{b-a} \leqslant 0$, et

$\forall x \geqslant b, \quad \pi_{a,m,b,\mathrm{M}}(x) = m + (\mathrm{M}-m) = \mathrm{M}$ $\mathrm{F}\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) = 1$ puisque $\dfrac{x-a}{b-a} \geqslant 1$

c) $\forall x \in\,]\,a\,;b\,[$, $\pi'_{a,m,b,\mathrm{M}}(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathrm{F}'\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) > 0$ car $\dfrac{x-a}{b-a} \in\,]\,0\,;1\,[$.

donc $\pi_{a,m,b,\mathrm{M}}$ est strictement croissante sur $[\,a\,;b\,]$.

5.a) Soit $g : x \mapsto \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x-2)$. On a : **i.** g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$;

ii. $\forall x \leqslant 0, g(x) = 0+0 = 0, \quad \forall x \geqslant 3, g(x) = 1-1 = 0,$
$\forall x \in [\,1\,;2\,], g(x) = 1-0 = 1.$

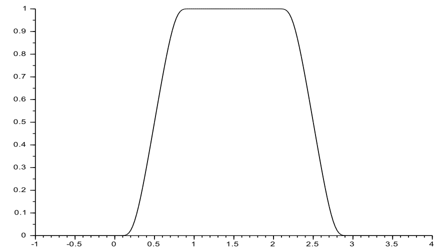
iii. $\forall x \in\,]\,0\,;1\,[, g(x) = \mathrm{F}(x), g'(x) = \mathrm{F}'(x) > 0$
$\forall x \in\,]\,2\,;3\,[, g(x) = 1-\mathrm{F}(x-3), g'(x) = -\mathrm{F}'(x-2) < 0$ car $x-2 \in\,]\,0\,;1\,[$.
g est strictement monotone sur les intervalles $[\,0\,;1\,]$ et $[\,2\,;3\,]$.

b) La courbe de g est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$, car le symétrique d'un point $\mathrm{B}(x,y)$ par rapport à cette droite est $\mathrm{C}(3-x, y)$.
Supposons que $\mathrm{B}(x, g(x))$ soit sur la courbe.
Alors, en utilisant $\mathrm{F}(1-x) = 1-\mathrm{F}(x)$,
$g(3-x) = \mathrm{F}(3-x) - \mathrm{F}(1-x) = \mathrm{F}(1-(x-2)) - 1 + \mathrm{F}(x) = 1 - \mathrm{F}(x-2) - 1 + \mathrm{F}(x) = g(x)$,
donc $\mathrm{C}(3-x, g(x))$ est aussi sur la courbe.

c)

```
function z=platos(t)
    z=plato(t)-plato(t-2)
endfunction

fplot2d(-1:0.025:4,platos)
```



Partie III. *Une variable aléatoire à densité*

1. F est une fonction de répartition de variable à densité car :

- F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$.

2.a) Pour tout a de $]\,0\,;1\,[$, l'équation $\mathrm{F}(x) = a$, d'inconnue x, possède une unique solution réelle car F est continue strictement croissante sur $]\,0\,;1\,[$ donc réalise une bijection de $]\,0\,;1\,[$ sur $\mathrm{F}(]\,0\,;1\,[) =]\,0\,;1\,[$.

b) $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant m) = \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant m) \Leftrightarrow \mathrm{F}(m) = 1 - \mathrm{F}(m) \Leftrightarrow \mathrm{F}(m) = 1/2$ donc X possède une unique médiane d'après a).
De plus, $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(1-x) = 1$ donne, pour $x = 1/2$, $2\mathrm{F}(1/2) = 1$, donc $\mathrm{F}(1/2) = 1/2$. La médiane de X est $1/2$.

3.a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0$ **b)** En dérivant « $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{F}(x) = 1 - \mathrm{F}(1-x)$ », on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1-x)$

c) $\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$ existe puisque $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$ et définit l'espérance de X d'après a). Le changement $u : t \mapsto 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,0\,;1/2\,]$.
$\displaystyle\int_0^{1/2} tf(t)\mathrm{d}t \overset{u=1-t}{=} -\int_1^{1/2} (1-u)f(1-u)\mathrm{d}u = \int_{1/2}^1 f(u)\mathrm{d}u - \int_{1/2}^1 uf(u)\mathrm{d}u$ d'après b),
donc par le relation de Chasles,
$\displaystyle\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^1 f(u)\mathrm{d}u = [\mathrm{F}(u)]_{1/2}^1 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 1/2$$