L'intégrale de Dirichlet

Dans ce devoir, on étudie l'intégrale : $\quad \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

1.a) Soit $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$. Justifier que J existe.

b) En déduire que I existe et vaut J.

c) En exprimant $\cos t$ en fonction $\sin^2\big(t/2\big)$, montrer par un changement de variable affine que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\mathrm{d}t$ existe et vaut aussi I.

2. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{A}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sin^2 nt}{\sin^2 t}\mathrm{d}t.$$

a) Justifier l'existence de I_n, A_n et B_n.

b) Établir que : $\quad \forall t \in \,]\,0\,;\pi/2\,[\,, \quad 0 \leqslant \sin t \leqslant t \leqslant \tan t.$

c) Justifier que : $\quad \mathrm{B}_n \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{A}_n.$

3.a) Montrer que, pour t réel de $]\,0\,;\pi/2\,[$ et n entier naturel,

$$\frac{\sin^2(nt) + \sin^2((n+2)t) - 2\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)} = 2\cos(2(n+1)t).$$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n + \mathrm{A}_{n+2} - 2\mathrm{A}_{n+1} = 0$.

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n = \dfrac{n\pi}{2}$.

d) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, que $\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \dfrac{\pi}{4}$ et en déduire la valeur de B_n en fonction de n.

e) Justifier finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n} = \frac{\pi}{2}$.

4. Par le changement de variable $u = nt$ dans I_n, en déduire la valeur de I.

Quelques indications :

1.a) L'intégrale est doublement impropre, mais que vaut $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1-\cos t)/t^2$?

1.b) Comment passer de $1-\cos(t)$ à $\sin(t)$ et de $1/t^2$ à $1/t$ (au signe près) ?

1.c) $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ donne $\cos(t) =???\sin^2(t/2)???$

2.a) Un même argument convient pour les trois intégrales.

3.a) $nt = (n+1)t - t$ et $(n+2)t = (n+1)t + t$...

3.c) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ...