

EXERCICE 1.

- 1.a) • $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$: J est faussement impropre en 0.
 • $\forall t \geq 1, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$: Par comparaison, J est convergente en $+\infty$.

b) Une IPP sur J avec $u : t \mapsto -1/t$ et $v : t \mapsto 1 - \cos t$, en remarquant que les limites des termes intégrés sont toutes nulles, montre que I existe et vaut J.

c) Avec $u = t/2$ changement de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $]0; +\infty[$, on obtient la réponse voulue car :

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2(t/2))}{t^2} dt = \frac{2 \sin^2(u)}{4u^2} 2du = \frac{\sin^2(u)}{u^2} du.$$

2.a) Les fonctions à intégrer sont continues sur $]0; \pi/2]$. De l'équivalent $\sin t \sim t$ on déduit que les intégrales I_n , A_n et B_n sont fausse-

ment impropres donc existent, car plus précisément $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 nt}{t^2} =$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t \sin^2 nt}{\sin^2 t} = n^2.$$

b) $\sin$ concave, $\tan$ convexe sur $[0; \pi/2[$, $y = t$ équation de leur tangente (commune) en 0, d'où $\forall t \in]0; \pi/2[$, $0 \leq \sin t \leq t \leq \tan t$.

c) 2.b) permet de classer les intégrandes⁽¹⁾, la croissance de l'intégrale donne alors : $B_n \leq I_n \leq A_n$.

3.a) $\frac{\sin^2(nt) + \sin^2((n+2)t) - 2\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)} = 2\cos(2(n+1)t)$ s'obtient en écrivant

$$\sin(nt) = \sin((n+1)t - t) = \sin((n+1)t) \cos t - \sin t \cos((n+1)t) \text{ et } \sin((n+2)t) = \sin((n+1)t + t) = \sin((n+1)t) \cos t + \sin t \cos((n+1)t).$$

On élève au carré, on somme, on regroupe, on simplifie⁽²⁾.

b) L'identité précédente donne

(1). Dans les vieux grimoires de mathématiques, on dénomme ainsi la fonction que l'on intègre. Le terme est tombé en désuétude, mais il est souvent bien pratique ...

(2). Si, si ! Ça marche !

$$A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2(n+1)t) dt = 0$$

c) ... donc $A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n = 0$. L'équation caractéristique admet 1 comme racine double, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = an + b$. $A_0 = 0$ et $A_1 = \pi/2$ entraîne $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\pi/2$.

d) $A_n - B_n = \int_0^{\pi/2} \sin^2(nt) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} dt$ (pour intégrer une puissance de "sinus", je linéarise ...)

$$A_n - B_n = \frac{\pi}{4} - [\sin(2nt)/4]_{\pi/2}^0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } B_n = A_n - \frac{\pi}{4} = n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

e) $B_n \leq I_n \leq A_n \Rightarrow \frac{B_n}{n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{A_n}{n}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{n} = \frac{\pi}{2}$, en appelant la gendarmerie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$.

4. Ici je suppose $n \geq 1$ ⁽³⁾. En posant $u = nt$ dans I_n , changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant sur $]0; \pi/2[$, $\frac{I_n}{n} =$

$$\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 u}{u^2} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I. \text{ Par unicité de la limite, } I = \frac{\pi}{2}.$$

COMMENTAIRES.

☞ L'intégrale I est un grand classique de l'analyse des concours. Il existe de nombreuses méthodes pour la calculer, la méthode proposée ici étant une des moins lourdes.

(3). Sinon le changement de variable n'est pas strictement croissant