

La sonnerie retentit et le petit Nicolas est au rez-de-chaussée. Il rejoint l'escalier le plus proche et, en arrivant au pied de celui-ci, se dit qu'il a encore un peu de temps. Avant chaque pas, il lance une pièce équilibrée et progresse d'une marche s'il obtient «pile» et de deux marches d'un coup s'il obtient «face».

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et D_n le nombre de fois où le petit Nicolas a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

1.a) Quelle est la loi usuelle suivie par D_n ?

b) En déduire l'espérance et la variance de X_n .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche.

2. Déterminer la loi de Y_1 , puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Dans toutes les questions suivantes, on suppose n au moins égal à 3.

3.a) Soit U l'événement

« le petit Nicolas ne gravit qu'une marche à son premier pas ».

Justifier que $\mathbb{E}(Y_n|U) = 1 + \mathbb{E}(Y_{n-1})$ et exprimer de même $\mathbb{E}(Y_n|\bar{U})$.

b) En déduire $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$.

4. On considère l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$ définie par $(\mathcal{R})$: pour tout $n \geq 3$, $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel α , que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie $(\mathcal{R})$.

b) Montrer que u vérifie la relation $(\mathcal{R})$ si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :

$$\text{pour tout } n \geq 3, v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-2}.$$

c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Y_n)$.

5.a) Justifier que $Y_n(\Omega) = \left\lfloor \text{Ent} \left(\frac{n+1}{2} \right) ; n \right\rfloor$, où $\text{Ent}(x)$ désigne la partie entière du réel x .

b) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on note $p_{n,k}$ la probabilité $\mathbb{P}(Y_n = k)$. Justifier que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $p_{n,k} = \frac{1}{2}p_{n-1,k-1} + \frac{1}{2}p_{n-2,k-1}$.

c) À l'aide de la question précédente, construire un tableau à double entrée donnant $p_{n,k}$ pour $1 \leq n \leq 4$ et $0 \leq k \leq 4$.

d) Retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(Y_3)$ et $\mathbb{E}(Y_4)$.