1.a) $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 1/2)$ car D_n compte le nombre de succès "obtenir pile" de probabilité $1/2$ lors de la répétition indépendante de n expériences.

b) $X_n = (n - D_n) + 2D_n = n + D_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(D_n) = 3n/2$ et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(D_n) = n/4$.

2. $Y_1 = 1, \mathbb{E}(Y_1) = 1$. $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}(D_1 = 1) = 1/2, \mathbb{P}(Y_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(Y_2 = 1) = 1/2$. $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1; 2\})$ et $\mathbb{E}(Y) = 3/2$.

3.a) *En raisonnant sur les espérances conditionnelles.*
Sachant U, le petit Nicolas a déjà fait un pas et il lui reste $n-1$ marches à gravir, ce qu'il peut espérer faire en $\mathbb{E}(Y_{n-1})$ pas, donc $\mathbb{E}(Y_n|U) = 1 + \mathbb{E}(Y_{n-1})$.
Sachant $\overline{U}$, le petit Nicolas a déjà fait un pas et il lui reste $n-2$ marches à gravir, ce qu'il peut espérer faire en $\mathbb{E}(Y_{n-2})$ pas, donc $\mathbb{E}(Y_n|\overline{U}) = 1 + \mathbb{E}(Y_{n-2})$.
En raisonnant sur les probabilités conditionnelles.
Notons que, pour tout $n \geqslant 3$, $Y_n(\Omega) \subset [\![1\,;n]\!]$, et, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\mathbb{P}_U(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$$

puisqu'en commençant par une marche, il reste $k-1$ pas pour gravir les $n-1$ marches restantes, tandis que

$$\mathbb{P}_{\overline{U}}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y_n|U) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}_U(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\mathbb{P}(Y_{n-1} = j)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}(Y_{n-1} = j) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_{n-1} = j) = \mathbb{E}(Y_{n-1}) + 1$$
$$\mathbb{E}(Y_n|\overline{U}) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}_{\overline{U}}(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\mathbb{P}(Y_{n-2} = j)$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}(Y_{n-2} = j) + \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_{n-2} = j) = \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

b) La formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $(U, \overline{U})$ donne

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$

4.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\alpha n = \frac{1}{2}\alpha(n-1) + \frac{1}{2}\alpha(n-2) + 1 \Leftrightarrow \alpha n = \alpha n - \frac{3}{2}\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$.
En prenant $\alpha = \frac{2}{3}$, la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie $(\mathcal{R})$.

b) u vérifie $(\mathcal{R})$ ssi $\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n_2} + 1$
ssi $\forall n \geqslant 3, \quad u_n - \alpha n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n_2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\alpha(n-1) + \frac{1}{2}\alpha(n-2) + 1\right)$
ssi $\forall n \geqslant 3, \quad u_n - \alpha n = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha(n-1)) + \frac{1}{2}(u_{n_2} - \alpha(n-2))$
ssi $\forall n \geqslant 3, \quad v_n = \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-2}$.

c) Prenons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \mathbb{E}(Y_n)$ et $v_n = u_n - \alpha n$. Par 3.b), u vérifie $(\mathcal{R})$, donc v vérifie la relation de récurrence linéaire de 4.b). Les solutions de l'équation caractéristique $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$. Il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \geqslant 1, v_n = a + b(-1/2)^n$.
De plus $v_1 = u_1 - \alpha = 1/3$ et $v_2 = u_2 - 2\alpha = 1/6$ conduit à $a = 2/9$ et $b = -2/9$.
Finalement : $\forall n \geqslant 1, \mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{3}n + \frac{2}{9}\left(1 - (\frac{-1}{2})^n\right)$.

5.a) Au plus rapide, le petit Nicolas procède systématiquement par pas de deux marches, il lui faut $\mathrm{Ent}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ pas. Au plus lent, il procède par pas d'une marche, il lui faut n pas.

b) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U, \overline{U})$,
$\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}_U(Y_n = k) + \mathbb{P}(\overline{U})\mathbb{P}_{\overline{U}}(Y_n = k)$
$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$.
Ainsi pour tout k de $\mathbb{N}^*$,

$$p_{n,k} = \frac{1}{2}p_{n-1,k-1} + \frac{1}{2}p_{n-2,k-1}.$$

c)

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
1	0	1	0	0	0
2	0	1/2	1/2	0	0
3	0	0	3/4	1/4	0
4	0	0	1/4	5/8	1/8

d) Les lignes $n = 3$ et $n = 4$ donnant les lois de Y_3 et Y_4, on peut retrouver les espérances :
$\mathbb{E}(Y_3) = \frac{9}{4}$ et $\mathbb{E}(Y_4) = \frac{23}{8}$.
Ces espérances sont conformes à la formule de 4.c).