EXERCICE 1. *Un coefficient de corrélation sans trop de calcul.*

On considère un processus bernoullien (*i.e.* une succession d'expériences indépendantes pouvant chacune se solder par soit un succès, soit un échec) de probabilité de succès $p \in]0; 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

Pour chaque n de $\mathbb{N}^*$, on note S_n et E_n le nombre de succès et d'échecs respectivement au cours des n premières épreuves.

On note enfin $\Delta_n = S_n - E_n$.

1.a) Rappeler la loi de S_n et de E_n , ainsi que leur espérance et leur variance.

b) Que vaut $S_n + E_n$?

c) En déduire $\text{Cov}(S_n, E_n)$.

d) En déduire $\rho(S_n, E_n)$. Ce résultat était prévisible ? Expliquer le signe de $\rho(S_n, E_n)$.

2.a) Déterminer la loi de Δ_1 , son espérance et sa variance.

b) Déterminer la loi de Δ_2 , son espérance et sa variance.

3.a) À l'aide de l'expression $\Delta_n = S_n - E_n$, calculer $\mathbb{E}(\Delta_n)$, puis $\mathbb{V}(\Delta_n)$ (on pourra utiliser 1.c)).

b) Exprimer Δ_n uniquement en fonction de S_n et de n et retrouver $\mathbb{E}(\Delta_n)$, puis $\mathbb{V}(\Delta_n)$.

c) À quelle condition *sine qua non* Δ_n est-elle centrée ⁽¹⁾ ?

4. Grâce à l'expression de 3.b), donner la loi de Δ_n en précisant explicitement $\Delta_n(\Omega)$.

5. Dans cette question, on souhaite calculer, pour tous m et n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient de corrélation linéaire de Δ_m et Δ_n .
Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a) On suppose $m = n$. Que valent $\text{Cov}(S_m, S_n)$ et $\rho(S_m, S_n)$?

b) On suppose $m < n$.

i. Justifier que $S_n - S_m$ est indépendante de S_m .

ii. En déduire $\text{Cov}(S_m, S_n)$, puis $\rho(S_m, S_n)$.

c) Sans refaire de calcul, justifier rigoureusement à l'aide 5.b) que lorsque $m > n$,
$$\rho(S_m, S_n) = \frac{n}{\sqrt{mn}}.$$

(1). c'est-à-dire $\mathbb{E}(\Delta_n) = 0$

d) Conclure.

e) À quelle condition *sine qua non* $\rho(S_m, S_n)$ vaut-il 1 ? Était-ce prévisible ?

EXERCICE 2. *Fonctions génératrices des V.A.R. infinies et espérance*

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On utilise les notations suivantes

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}(X = k) \text{ et } \forall t \in [0; 1], \quad G(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k.$$

1. Justifier que G est définie sur $[0; 1]$.

2. **Lorsque $\mathbb{E}(X)$ existe**

Dans cette question, on suppose que X admet une espérance.

a) Vérifier que

$$\forall t \in [0; 1[, \quad \frac{G(t) - G(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right).$$

b) En déduire que $t \mapsto \frac{G(t) - G(1)}{t - 1}$ est croissante et majorée par $\mathbb{E}(X)$ sur $[0; 1[$. Que peut-on en conclure ?

c) En remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; 1[, \quad \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t - 1},$$

montrer que $G'(1) = \mathbb{E}(X)$.

3. **Lorsque $G'(1)$ existe**

On suppose que G est dérivable en 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).

En s'inspirant des majorations précédentes, montrer que X admet une espérance, égale à $G'(1)$.