Exercice 1. *Un coefficient de corrélation sans trop de calcul.*

1.a) $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $E_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,q)$, $\mathbb{E}(S_n) = np$, $\mathbb{E}(E_n) = nq$, $\mathbb{V}(S_n) = npq = \mathbb{V}(E_n)$.

b) $S_n + E_n = n$.

c) $\mathrm{Cov}(S_n, E_n) = \mathrm{Cov}(S_n, n - S_n) = -\mathrm{Cov}(S_n, S_n) = -\mathbb{V}(S_n) = -npq$.

d) $\rho(S_n, E_n) = -\dfrac{npq}{\sqrt{npq}\sqrt{npq}} = -1$.
Résultat prévisible : $E_n = n - S_n = aS_n + b$ avec $a = -1$ et $b = n$.
Signe de $\rho(S_n, E_n)$: signe de a.

2.a) $\Delta_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\Delta_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\Delta_1 = -1) = \mathbb{P}(S_1 = 0) = q$
$\mathbb{E}(\Delta_1) = p - q = 2p - 1$, $\mathbb{E}(\Delta_1^2) = 1$, $\mathbb{V}(\Delta_1) = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4pq$

b) $\Delta_2(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$,
$\mathbb{P}(\Delta_2 = -2) = \mathbb{P}(S_1 = 0) = q^2$, $\mathbb{P}(\Delta_2 = 0) = \mathbb{P}(S_2 = 1) = 2pq$,
$\mathbb{P}(\Delta_2 = 2) = \mathbb{P}(S_1 = 2) = p^2$.
$\mathbb{E}(\Delta_2) = 2p^2 - 2q^2 = 2(p-q)(p+q) = 2(p-q)$,
$\mathbb{E}(\Delta_2^2) = 4(p^2 + q^2) = 4(2p^2 - 2p + 1)$,
$\mathbb{V}(\Delta_2) = 4(p^2 + q^2) - 4(p-q)^2 = 8pq$.

3.a) $\mathbb{E}(\Delta_n) \overset{\text{lin.}}{=} \mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(E_n) = np - nq = n(p-q) = n(2p-1)$
$\mathbb{V}(\Delta_n) = \mathbb{V}(S_n) + \mathbb{V}(E_n) - 2\mathrm{Cov}(S_n, E_n) = npq + npq + 2npq = 4npq$

b) $\Delta_n = S_n - E_n = S_n - (n - S_n) = 2S_n - n$
$\mathbb{E}(\Delta_n) \overset{\text{lin.}}{=} 2\mathbb{E}(S_n) - n = 2np - n = n(2p-1) = n(p-q)$
$\mathbb{V}(\Delta_n) = 4\mathbb{V}(S_n) = 4npq$

c) $\mathbb{E}(\Delta_n) = 0 \Leftrightarrow p = q = 1/2$

4. $\Delta_n(\Omega) = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\} = \{2k - n / k \in [\![0\,;\,n]\!]\}$ car $S_n(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ et $\Delta_n = 2S_n - n$.
$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]\,, \mathbb{P}(\Delta_n = 2k-1) = \mathbb{P}(S_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

5. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

a) On suppose $m = n$. $\mathrm{Cov}(S_m, S_n) = \mathbb{V}(S_m)$ et $\rho(S_m, S_n) = 1$ (relation linéaire : $S_m = 1 \times S_n$!)

b) On suppose $m < n$.

i. $S_n - S_m$ est le nombre de succès de la $(m+1)^{\text{ème}}$ expérience à la $n^{\text{ème}}$, et S_m le nombre de succès de la $1^{\text{ère}}$ à la $m^{\text{ème}}$ expérience.
Par indépendance des expériences, $S_n - S_m$ est indépendante de S_m.

ii. $\mathrm{Cov}(S_m, S_n) = \mathrm{Cov}(S_m, (S_n - S_m) + S_m) = \mathrm{Cov}(S_m, (S_n - S_m)) + \mathrm{Cov}(S_m, S_m) \overset{\text{indép.}}{=} 0 + \mathbb{V}(S_m) = mpq$,
$\rho(S_m, S_n) = \dfrac{mpq}{\sqrt{mpq}\sqrt{npq}} = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

c) ρ est symétrique, donc :
$\rho(S_m, S_n) = \rho(S_n, S_m)$ avec $n < m$: on peut utiliser 5.b)
$\rho(S_m, S_n) = \sqrt{\dfrac{n}{m}}$.

d) Une formule qui marche dans les trois cas :
$\rho(S_m, S_n) = \dfrac{\min(m,n)}{\sqrt{mn}}$.

e) $\rho(S_m, S_n) = 1 \Leftrightarrow m = n$, prévisible car dans ce cas $S_m = S_n$.

Exercice 2. *Fonctions génératrices des V.A.R. infinies et espérance*

1. Soit $t \in [\,0\,;\,1\,]$.
On a : $0 \leqslant a_k t^k \leqslant a_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k$ est une série convergente de somme 1. Par comparaison de termes généraux positifs, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k t^k$ converge, donc $G(t)$ existe.
G est bien définie sur $[\,0\,;\,1\,]$.

2. **Lorsque $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ existe**

a) Soit $t \in [\,0\,;\,1\,[$.

$$\frac{G(t) - G(1)}{t-1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k}{t-1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (t^k - 1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \frac{t^k - 1}{t-1} \right)$$ (le terme pour $k = 0$ étant nul),

$$\frac{G(t) - G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right)$$ (où on reconnaît une somme de termes géométriques).

b) • Croissance : si $0 \leqslant t \leqslant t'$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} t^i \leqslant a_k \sum_{i=0}^{k-1} t'^i$, donc $\dfrac{G(t) - G(1)}{t-1} \leqslant \dfrac{G(t') - G(1)}{t'-1}$.

• Majoration : si $t \in [\,0\,;\,1\,[$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} t^i \leqslant a_k \times k$

En sommant pour $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{G(t) - G(1)}{t-1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \times k = \mathbb{E}(X)$

• Conséquence : $t \mapsto \dfrac{G(t) - G(1)}{t-1}$ est croissante et majorée (par $\mathbb{E}(X)$) sur $[\,0\,;\,1\,[$

donc $\lim_{t\to 1^-} \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ existe et est finie.
Donc G est dérivable en 1, et on a aussi $G'(1) \leqslant \mathbb{E}(X)$.

c) • Soit $t \in [0\,;1[$.
Comme $\dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est une somme de série à termes positifs, $\dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est plus grande que chaque somme partielle. En effet :
$\dfrac{G(t)-G(1)}{t-1} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \geqslant 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par conservation des inégalités larges en passant à la limite pour t tendant vers 1 (toutes les limites existent !) :
$\lim_{t\to 1} \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leqslant \lim_{t\to 1} \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} a_k \times k \leqslant G'(1)$.
• Cette inégalité étant valable pour tout n, passons à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (toutes les limites existent, bis !) :
$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \leqslant G'(1)$, donc $\mathbb{E}(X) \leqslant G'(1)$.
• Bilan : $\mathbb{E}(X) \leqslant G'(1) \leqslant \mathbb{E}(X)$, donc $E(X) = G'(1)$

3. Lorsque $G'(1)$ existe

Il suffit de prouver que $\mathbb{E}(X)$ existe. Par conséquence de 2), on aura alors $\mathbb{E}(X) = G'(1)$.
On peut encore écrire comme en 2), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par conservation des inégalités larges en passant à la limite pour t tendant vers 1 (toutes les limites existent !) :
$\lim_{t\to 1} \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leqslant \lim_{t\to 1} \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} a_k \times k \leqslant G'(1)$.
On suppose que G est dérivable en 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).
Ainsi, la suite de somme partielle $\left(\sum_{k=0}^{n} k a_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée (par $G'(1)$). Or cette suite est croissante :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n+1} k a_k - \sum_{k=0}^{n} k a_k = (n+1)a_{n+1} \geqslant 0$.
Donc cette suite converge, autrement dit la série $\sum_{k\geqslant 0} k a_k$ converge, autrement dit $\mathbb{E}(X)$ existe... ce qu'il suffisait de démontrer.