

PRODUITS SCALAIRES SUR $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

PARTIE I. Étude d'un premier produit scalaire**1.a) Existence**

Comme dans l'exercice 4.1, on calcule ${}^tX \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} X$ et constate que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ convient.}$$

Unicité

Là, c'est plus délicat.

Supposons qu'une autre matrice N satisfasse : $\forall (X, Y) \in E^2, \varphi(X, Y) = {}^tXNY$.

Alors $\forall (X, Y) \in E^2, {}^tX(M - N)Y = {}^tXMY - {}^tXNY = \varphi(X, Y) - \varphi(X, Y) = 0$.

Puisque $M - N \neq 0$, alors il existe Y tel que $(M - N)Y \neq 0$.

Posons alors $X = (M - N)Y$ (donc $X \neq 0$). On a :

$\|X\|^2 = {}^tXZ = {}^tX(M - N)Y = 0$, donc $X = 0$, ce qui est absurde.

Donc il n'existe pas d'autre matrice satisfaisant la relation souhaitée.

- b) •** $\forall (X, Y, Z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $\varphi(\lambda X + Y, Z) = {}^t(\lambda X + Y)MZ = (\lambda {}^tX + {}^tY)MZ = \lambda {}^tXMZ + {}^tYMZ = \lambda \varphi(X, Z) + \varphi(Y, Z)$.

• $\forall (X, Y) \in E^2, \varphi(X, Y) = {}^tXMY = {}^tX {}^tMY$ car M est symétrique,
 $\varphi(X, Y) = {}^t(MX)Y = {}^t({}^t(MX)Y)$ car une matrice carrée d'ordre 1 est égale à sa transposée!!!

$\varphi(X, Y) = {}^tY(MX) = \varphi(Y, X)$.

φ est donc une forme linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire symétrique.

- c) •** $\forall X \in E, \varphi(X, X) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 \geq 0$
 Si de plus $\varphi(X, X) = 0$, alors chaque terme de cette somme est nul, car une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme est positif.
 Ainsi, φ est positive et définie.

- d) •** φ est un produit scalaire sur E .

- 2.a) •** $\text{rg}(L) = 3$ car L est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux tous non nuls.

- b) •** Comme $\text{rg}({}^tL) = \text{rg}(L) = 3$, tL est inversible.
 Alors : $({}^tL)X = 0 \Leftrightarrow ({}^tL)^{-1}({}^tL)X = ({}^tL)^{-1}0 \Leftrightarrow X = 0$.
 On peut aussi résoudre le système d'inconnues x_1, x_2 et x_3 .

- c) •** $L {}^tL = M$.

- d) •** $\forall X \in E, \varphi(X, X) = {}^tXMX = {}^tXL {}^tLX \stackrel{{}^t(AB) = {}^tB {}^tA}}{=} {}^tB {}^tA {}^t({}^tLX)LX = \|{}^tLX\|^2$.

- e) •** Clairement, $\forall X \in E, \varphi(X, X) = \|{}^tLX\|^2 \geq 0$.
 • $\varphi(X, X) = 0 \Rightarrow \|{}^tLX\| = 0 \Rightarrow {}^tLX = 0 \Rightarrow X = 0$ par 2.b)
 Bilan : φ est définie et positive.

- 3.a) •** Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour le produit scalaire φ appliquée à X et Y donne : $(\varphi(X, Y))^2 \leq \|Y\|^2 \|X\|^2$,
 c'est-à-dire : $(3x_1 + 3x_2 + 3x_3)^2 \leq 15(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3)$.

- b) •** Supposons $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

L'inégalité précédente devient $9 \leq 15(2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3)$.

Il y a égalité dans cette inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, X est colinéaire à Y , c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = aY$, c'est-à-dire $x_1 = a, x_2 = 3a$ et $x_3 = a$. La condition $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ impose $5a = 1$ soit $a = 1/5$.

Donc s'il y a une solution, c'est nécessairement $(x_1, x_2, x_3) = (1/5, 3/5, 1/5)$.

Réciproquement, avec $(x_1, x_2, x_3) = (1/5, 3/5, 1/5)$,
 $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = \frac{2+9+2+2}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

Bilan : si $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, alors

$$2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 = \frac{9}{15} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (1/5, 3/5, 1/5)$$

- 4.a) •** Partons de $\mathcal{B}$ pour construire une base orthogonale (U_1, U_2, U_3) .

On a : $\varphi(E_1, E_2) = 0$ donc (E_1, E_2) est orthogonale.

Mais : $\varphi(E_1, E_3) = 1 \neq 0$ donc (E_1, E_2, E_3) n'est pas orthogonale.

Posons $U_1 = E_1, U_2 = E_2$ et $U_3 = E_3 + \alpha U_1 + \beta U_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \varphi(U_3, U_1) = 0 \\ \varphi(U_3, U_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 1 = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on peut choisir $U_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou même $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour éviter les

fractions.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base orthogonale de } E \text{ (pour } \varphi).$$

Il reste à normaliser chaque vecteur.

$$\|U_1\|^2 = \varphi(U_1, U_1) = 2, \|U_2\|^2 = \varphi(U_2, U_2) = 1, \|U_3\|^2 = \varphi(U_3, U_3) = 6, \text{ d'où } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base orthonormale de } E \text{ (pour } \varphi).$$

b) Soit $X \in E$.

$$X \in (\text{Vect}(E_1 + E_2))^\perp \Leftrightarrow \varphi(X, E_1 + E_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -(x_2 + x_3)/2 \\ x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ Donc } (\text{Vect}(E_1 + E_2))^\perp = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

PARTIE II. Étude d'une famille de produit scalaire

1. • $\forall (X, Y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_a(X) = M_a X \in E$ et $f_a(\lambda X + Y) = M_a(\lambda X + Y) = \lambda M_a X + M_a Y = \lambda f_a(X) + f_a(Y)$.
Donc f_a est un endomorphisme de E .

$$\bullet f_a(E_1) = M_a E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, f_a(E_2) = M_a E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_a(E_3) = M_a E_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a) = M_a.$$

☞ Ce résultat est prévisible : puisque nous utilisons la base canonique de E , $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a(X)) = f_a(X)$, or nous savons (ECS1) que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a(X)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(X)$ d'où $f_a(X) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a) X$. Et comme $f_a(X) = M_a X$, on peut soupçonner que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_a) = M_a$.

2. Par les mêmes arguments qu'en I.1b), puisque M_a est symétrique, φ_a est une forme bilinéaire et symétrique.

- 3.a) $\langle U, V \rangle = 0, \langle U, W \rangle = 0$ et $\langle V, W \rangle = 0$ donc $\mathcal{C} \stackrel{\text{déf.}}{=} (U, V, W)$ est une famille orthogonale de E . Or une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre, donc $\mathcal{C}$ est aussi libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim E$, $\mathcal{C}$ est une base de E .

$\mathcal{C} = (U, V, W)$ est une base orthogonale de E .

- b) En divisant chaque vecteur de $\mathcal{C}$ par sa norme, on obtient une base orthonormale $\mathcal{C}'$ de E :

$$\mathcal{C}' \stackrel{\text{déf.}}{=} (U', V', W') \stackrel{\text{déf.}}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base orthonormale.}$$

- c) P est la matrice de passage entre les bases orthonormales $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}'$. Donc $P^{-1} = {}^t P$.

- 4.a) $f_a(U) = M_a U = (2 - a)U$ donc $\lambda_a = 2 - a$.
 $f_a(V) = M_a V = (2 + a)V$ donc $\mu_a = 2 + a$.
 $f_a(W) = M_a W = W$ donc $\nu_a = 1$.

$$\text{b) } D_a = \mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(f_a) = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \nu_a \end{pmatrix}.$$

- 5.a) Le théorème de changement de base donne : $D_a = P^{-1} M_a P$. Alors $P D_a P^{-1} = P P^{-1} M_a P P^{-1} = M_a$. Et comme $P^{-1} = {}^t P$, $M_a = P D_a {}^t P$.

- b) Soit $X \in E$ et $Y = {}^t P X$.

$$\varphi_a(X, X) = {}^t X M_a X = {}^t X P D_a {}^t P X = {}^t ({}^t P X) D_a {}^t P X = {}^t Y D_a Y =$$

$$(y_1 \ y_2 \ y_3) D_a \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda_a y_1^2 + \mu_a y_2^2 + \nu_a y_3^2.$$

- c) $\forall X \in E, \varphi_a(X, X) = (2 - a)y_1^2 + (2 + a)y_2^2 + y_3^2$.

- Si $-2 < a < 2$ alors $2 - a > 0$ et $2 + a > 0$. Du coup :

- (i) $\forall X \in E, \varphi_a(X, X) \geq 0$.

- (ii) $\varphi_a(X, X) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow X = 0$ car $X = P Y$.

- Si $a = 2$, alors pour $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = P Y$, $\varphi_a(X, X) = 0$ alors que $X \neq 0$ (car

$$X = 0 \Rightarrow Y = {}^t X = 0).$$

Donc φ_a n'est pas définie : ce n'est pas un produit scalaire.

- Si $a > 2$, alors pour $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = P Y$, $\varphi_a(X, X) = 2 - a < 0$

Donc φ_a n'est pas positive : ce n'est pas un produit scalaire.

On analyse de façon analogue les cas $a = -2$ et $a < -2$.

Bilan : φ_a est un produit scalaire si, et seulement si, $-2 < a < 2$.