Remarque : pour tout $n \geqslant 1$, $([X_n = k])_{1 \leqslant k \leqslant 3}$ est un SCE, donc $a_n + b_n + c_n = 1$.

1.a) $M^2 = M$ donc une récurrence immédiate donne $\forall n \geqslant 1, M^n = M$.

b) $\forall n \geqslant 2, U_n = M^{n-1}U_1 = MU_1 = \begin{pmatrix} (a_1+b_1+c_1)/3 \\ (a_1+b_1+c_1)/3 \\ (a_1+b_1+c_1)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;3]\!])$ pour tout $n \geqslant 2$.

2. Les transformations suivantes sur $M - \lambda I_3$

$$L_1 \leftrightarrow L_3, \text{ puis } \begin{matrix} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 + 2\lambda L_1 \to L_3 \end{matrix}, \text{ puis } L_3 + L_2 \to L_3$$

conduisent à $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1/2 & \lambda + 1/2 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2 + \lambda + 1 \end{pmatrix}$.

a) $\mathrm{rg}(M - I_3) = 2$: 1 est valeur propre, $\dim(E_1) = 3 - 2 = 1$ et $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{rg}(M - (-1/2)I_3) = 1$: $-1/2$ est l'unique autre valeur propre de M avec $\dim(E_{-1/2}) = 2$.

$E_{-1/2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x + y + z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ par exemple.

c) M est diagonalisable, donc E_1 et $E_{-1/2}$ sont supplémentaires, donc la concaténée (V_1, W_1, W_2) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc il existe trois réels (uniques !) α_1, β_1 et β_2 tels que $U_1 = \alpha_1 V_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2$.

d) Comme $V_1 \in E_1, \forall k \in \mathbb{N}, M^k V_1 = V_1$.
Comme $(W_1, W_2) \in E_{-1/2}^2, \forall k \in \mathbb{N}, M^k W_1 = (-1/2)^k W_1, M^k W_2 = (-1/2)^k W_2$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = M^{n-1}(\alpha_1 V_1 + \beta_1 W_1 + \beta_2 W_2)$.

$$U_n = \alpha_1 V_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \big(\beta_1 W_1 + \beta_2 W_2\big).$$

e) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n + b_n + c_n = 1$, remarque liminaire.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha_1 V_1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

g) D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 1$ par e), et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 3\alpha_1$ par g).
Donc $\alpha_1 = 1/3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1/3$.
La loi de X_n s'approche de $\mathcal{U}([\![1\,;3]\!])$.

3. Dans cette question, le système est régi par :

$$(\mathcal{S}) \quad \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n. \end{cases}$$

Posons : $\forall n \geqslant 1, s_n = a_n + b_n$ et $d_n = a_n - b_n$.

a) $(\mathcal{S})$ induit $\forall n \geqslant 1, s_{n+1} = \frac{1}{2} s_n$: s géométrique donc $\forall n \geqslant 1, s_n = (1/2)^{n-1} s_1$.
$(\mathcal{S})$ induit $\forall n \geqslant 1, d_{n+1} = -\frac{1}{2} d_n$: d géométrique donc $\forall n \geqslant 1, d_n = (-1/2)^{n-1} d_1$.
En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(s_n + d_n) = 0$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{2}(s_n - d_n) = 0$,
et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - a_n - b_n = 1$.

c) Lorsque n devient grand, $\mathbb{P}(X_n = 3)$ tend vers 3, la loi de X_n s'approche de la loi de la variable constante égale à 3.