EXERCICE 1. Étude de la loi de Laplace

Soit $c \in]0; +\infty[$ et

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{c}{2} e^{-c|x|}.$$

- Étudier la parité de f et montrer que f est une densité de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition de F .
Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. On dit que X suit la loi de Laplace de paramètre c .
- Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k noté m_k que l'on calculera. On pensera à exploiter la parité de f .
- En déduire l'espérance et la variance de X .
- Soit $Y = |X|$. Montrer que Y suit une loi usuelle à préciser.
- Soit U une variable de loi uniforme sur $]0; 1[$.

Soit Z définie par

$$Z = \begin{cases} \frac{\ln(2U)}{c} & \text{si } U < 1/2, \\ -\frac{\ln(2-2U)}{c} & \text{si } U \geq 1/2. \end{cases}$$

- Montrer que Z suit une loi de Laplace en précisant son paramètre.
- On admet que la fonction SCILAB `rand` fournit un réel de $]0; 1[$ suivant la loi uniforme. Compléter la fonction suivante afin qu'elle calcule un réel suivant la loi de Laplace de paramètre c :

```
function z=Laplace(c)
    u=.....;
    if ..... then
        z=.....
    else z=.....
endfunction
```

EXERCICE 2. Diagonalisation dans un espace de polynômes**PARTIE I. Promenade barisienne.**

Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = XP(X) - \frac{X(X-1)}{3}P'(X).$$

- Pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, calculer $f(X^k)$.
- Démontrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
- Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^3, X^2, X, 1)$.
- Justifier que f est diagonalisable et déterminer ses sous-espaces propres.
- Déterminer une base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres de f tels que la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ soit triangulaire supérieure et dont la première ligne ne contienne que des 1.
- Montrer que $P^2 = I_4$ et en déduire P^{-1} . Sans effectuer le produit matriciel, expliquer ce que vaut $D = PMP$.
- Exprimer M^m en fonction de P et D^m pour tout entier naturel m .

PARTIE II. Escapade parisienne.

Soit n un entier naturel non nul. Soit f l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = XP(X) - \frac{X(X-1)}{n}P'(X).$$

- Démontrer que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
- Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B} = (X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1)$ et justifier que f est diagonalisable.
- Montrer que si $\deg(P) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors $\deg(f(P)) = \deg(P) + 1$.
 - En déduire que les vecteurs propres de f sont tous de degré n .
 - Montrer que les vecteurs propres de f n'admettent que 0 ou/et 1 pour racines.
Indication : Si P est un vecteur propre, vous pourrez écrire $P = X^p(X-1)^q R(X)$ avec $R(0) \neq 0$ et $R(1) \neq 0$ et montrer que R est constant.
 - En déduire les sous-espaces propres de f .
- On pose, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P_k = X^k(X-1)^{n-k}.$$

On considère la base $\mathcal{B}'$ définie par

$$\mathcal{B}' = (P_n, P_{n-1}, \dots, P_1, P_0).$$

On note Π la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

 - Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, que vaut $f(P_k)$?
 - Expliciter Π en donnant ses coefficients.
 - Montrer que $\Pi^2 = I_{n+1}$.
 - Donner la matrice $\Pi M \Pi$.