Thèmes : convergence d'intégrales, changement de variables, variables à densité, théorème de convolution, applications concrètes des probabilités, variables discrètes, utilisation de Scliab.

On pourra utiliser Scilab pour les calculs de valeurs approchées.

1. Pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$, on note

$$\mathrm{I}_x \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}.$$

a) Vérifier que l'intégrale doublement impropre I_x existe bien pour tout x de $]\,0\,;+\infty\,[$.

b) À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{t}{x}$, montrer que

$$\mathrm{I}_x = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2\pi}\mathrm{I}_1.$$

c) À l'aide du changement de variable $u = \cos^2\theta$, montrer que

$$\mathrm{I}_x = \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2}.$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

a) Déterminer une densité de $\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$.

b) Montrer que $\mathrm{U} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{2}$ suit la loi gamma de paramètre 1.

3. Une imprimante doit noircir le point de coordonnées $(0,0)$ d'un repère orthonormé.

Pour des raisons techniques, l'imprimante souffre d'une légère imprécision et elle noircit le point de coordonnées $(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ où X' et Y' sont deux variables indépendantes de loi normale centrée d'écart-type σ (avec $\sigma \in \,]\,0\,;+\infty\,[$), l'unité de mesure étant le millimètre.

a) Quelles sont les coordonnées du « point espéré » $\big(\mathbb{E}(\mathrm{X}'),\mathbb{E}(\mathrm{Y}')\big)$?

On note R la distance (en millimètres) séparant le point noirci $(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')$ du point $(0,0)$.

On note X et Y les variables définies par

$$\mathrm{X} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\sigma}\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{\sigma}\mathrm{Y}'.$$

b) Quelle est la loi suivie par X et Y ?

c) Exprimer R à l'aide de X' et Y', puis à l'aide de $\mathrm{U} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2}{2}$.

d) Calculer alors l'espérance et l'écart-type de R en fonction de σ.

e) Calculer, en fonction de σ, la probabilité que le point noirci soit à moins de 1 *mm* du point $(0,0)$.

Donner une valeur approchée de cette probabilité à $0,01$ près lorsque σ vaut 1.

4. Le constructeur de l'imprimante souhaite que la probabilité que la distance du point noirci à $(0,0)$ soit inférieure à 1 *mm* vaille $0,9$. Pour cela, il peut réduire l'écart-type σ des variables coordonnées.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) = 0,9 \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{2\ln(10)}}.$$

b) Donner une valeur approchée de σ à $0,001$ près.

5. Finalement, le constructeur opte pour un écart-type σ égal à $1/3$.

Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1)$ arrondie au centième le plus proche.

6. Dans cette question, on suppose que σ est tel $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) = 99\%$ et on dit qu'un point est « acceptable » lorsque $\mathrm{R} \leqslant 1$.

L'imprimante noircit 100 points indépendamment les uns des autres. On note A le nombre de points acceptables parmi ces 100 points.

a) Que vaut $\mathbb{E}(\mathrm{A})$? Et $\mathbb{V}(\mathrm{A})$?

b) À l'aide de la fonction `binomial` (voir l'aide en ligne), donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(\mathrm{A} = 100)$.

c) Que calcule le script suivant ?

```
b=binomial(.99,100)
sum(b(98:101))
```

Donner la valeur obtenue.