1.a) $\dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge (Riemann) donnent la convergence en 0 par équivalence de fonctions positives.

$\dfrac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} \underset{t\to x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{\sqrt{x-t}}$ et $\displaystyle\int_{x/2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x-t}}$ converge (Riemann) donnent la convergence en 0 par équivalence de fonctions positives.

b) $\mathrm{I}_x \overset{u=t/x}{=} \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{ux}\sqrt{x-ux}}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{x}{x\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u = \mathrm{I}_1$

c) $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \overset{u=\cos^2\theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta}\sqrt{1-\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta$

Or $\sqrt{\sin^2\theta} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sin\theta$ car $\sin\theta \geqslant 0$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

$\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\mathrm{d}\theta = \pi$, et $\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,[\,,\quad \mathrm{I}_x = \pi$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

a) $\mathrm{X}^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et $\forall x \geqslant 0$,

$\mathrm{F}_{\mathrm{X}^2/2}(x) = \mathbb{P}(-\sqrt{2x} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \sqrt{2x}) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1$

$$f_{\mathrm{X}^2/2}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2x}}\varphi(\sqrt{2x}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) *Réponse utilisant une stabilité (rapide) :*

La densité précédente est celle de $\gamma(1/2)$, donc $\mathrm{X}^2/2$ et $\mathrm{Y}^2/2$ sont deux variables indépendantes de loi $\gamma(1/2)$. Par stabilité de γ, leur somme U suit $\gamma(1)$.

Réponse utilisant le théorème de convolution (plus longue) :

U est la somme des deux variables **indépendantes** $\mathrm{X}^2/2$ et $\mathrm{Y}^2/2$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{X}^2/2}(t) f_{\mathrm{Y}^2/2}(x-t)\mathrm{d}t$

Si $t \leqslant 0$, $f_{\mathrm{X}^2/2}(t) = 0$ et si $t \geqslant x$, $f_{\mathrm{Y}^2/2}(x-t) = 0$.

Du coup, si $x \leqslant 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, f_{\mathrm{X}^2/2}(t)f_{\mathrm{Y}^2/2}(x-t) = 0$: $g(x)$ existe et vaut 0.

Et si $x \geqslant 0$, alors $g(x)$ se réduit à

$$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-(x-t)}}{\pi\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\pi}\mathrm{I}_x$$

Donc $g(x)$ existe et vaut $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\pi}\pi = \mathrm{e}^{-x}$.

g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$: par le théorème de convolution, c'est une densité de $(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)/2$. Et on reconnaît une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

3.a) $\big(\mathbb{E}(\mathrm{X}'), \mathbb{E}(\mathrm{Y}')\big) = (0,0)$.

b) Par stabilité affine, la loi suivie par X et Y est $\mathcal{N}(0;1)$.

c) $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2} = \sqrt{\sigma^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)} = \sigma\sqrt{2\mathrm{U}}$.

d) $\mathbb{E}(\mathrm{R}) \overset{\text{transf.}}{=} \sigma\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{u}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \sigma\sqrt{2}\Gamma(3/2) = \sigma\sqrt{2}\sqrt{\pi}/2 = \sigma\sqrt{\pi/2}$

$\mathbb{E}(\mathrm{R}^2) \overset{\text{transf.}}{=} 2\sigma^2\displaystyle\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2\sigma^2\Gamma(2) = 2\sigma^2$

$\mathbb{V}(\mathrm{R}) = 2\sigma^2 - \sigma^2\pi/2 = \sigma^2\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sigma(\mathrm{R}) = \sigma\sqrt{\dfrac{4-\pi}{2}}$.

e) $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) = \mathbb{P}(\sigma\sqrt{2\mathrm{U}} \leqslant 1) = \mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant 1/(2\sigma^2)) = 1 - \mathrm{e}^{-1/(2\sigma^2)}$

Pour $\sigma = 1$, $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) \simeq 0{,}39$.

4.a) $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-1/(2\sigma^2)} = 9/10 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1/(2\sigma^2)} = 1/10 \Leftrightarrow -1/(2\sigma^2) = -\ln(10) \Leftrightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{1}{2\ln(10)}}$.

b) $\sigma \simeq 0{,}466$ à $0{,}001$ près.

5. Avec $\sigma = 1/3$, $\mathbb{P}(\mathrm{R} \leqslant 1) \simeq 0{,}99$ à $0{,}01$ près.

6. A compte le nombre de « points acceptables » lors de 100 expériences indépendantes toutes de probabilité de succès $0{,}99$, donc $\mathrm{A} \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0{,}99)$

a) $\mathbb{E}(\mathrm{A}) = 99$ et $\mathbb{V}(\mathrm{A}) = 0{,}99$.

b) `b=binomial(.99,100); b(101)` donne $\mathbb{P}(\mathrm{A} = 100) \simeq 36{,}6\%$.

c) Le script suivant calcule $\mathbb{P}(\mathrm{A} \geqslant 97)$.

$\mathbb{P}(\mathrm{A} \geqslant 97) \simeq 98{,}2\%$.