EXERCICE 1. Traiter un des exercices du sujet de D.S. n° 4 type EDHEC.

EXERCICE 2.

Soit n un entier naturel, tel que $n \geqslant 2$, et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices symétriques et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$).

On pose

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2,\ \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B}).$$

1. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire. On notera $||.||$ la norme associée.

2. Montrer que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E. *On pourra remarquer que, pour toute matrice M,*

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}) + \frac{1}{2}(\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}).$$

3. **a)** Soit p_{S} la projection orthogonale de E sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que pour toute matrice M de E, $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}\big)$.

b) Dans cette question $n = 3$ et on pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer la distance de M à $\mathrm{S}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$d(\mathrm{M}, \mathrm{S}_3(\mathbb{R})) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{\mathrm{N} \in \mathrm{S}_3(\mathbb{R})} ||\mathrm{M} - \mathrm{N}||.$$

4. Soit $\mathrm{H} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et de dimension $n^2 - 1$.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{H}$. Calculer $\langle \mathrm{M}, \mathrm{I}_n \rangle$ (où I_n désigne la matrice identité d'ordre n) et en déduire une base orthonormale de $\mathrm{H}^{\perp}$.

c) Soit J la matrice de E dont tous les termes sont égaux à 1 et q la projection orthogonale sur $\mathrm{H}^{\perp}$.
Justifier que la distance de J à H, définie par

$$d(\mathrm{J}, \mathrm{H}) \overset{\text{déf.}}{=} \inf_{\mathrm{N} \in \mathrm{H}} ||\mathrm{M} - \mathrm{N}||$$

vérifie $d(\mathrm{J}, \mathrm{H}) = ||q(\mathrm{J})||$, puis la calculer.