EXERCICE 1. Voir corrigé du D.S. n° 4 type EDHEC.

EXERCICE 2.

1. • Pour $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\langle \lambda A + B, C\rangle = \mathrm{Tr}((\lambda A + B)\,{}^tC) = \mathrm{Tr}(\lambda A\,{}^tC + B\,{}^tC)$
$\langle \lambda A + B, C\rangle \overset{\text{lin.}}{=} \lambda \mathrm{Tr}(A\,{}^tC) + \mathrm{Tr}(B\,{}^tC) = \lambda \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$
• Pour $A, B \in E$,
$\langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}(B\,{}^tA) = \mathrm{Tr}\big({}^t(B\,{}^tA)\big)$ puisque $\forall M \in E, \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}({}^tM)$
$\langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}({}^t({}^tA)\,{}^tB) = \mathrm{Tr}(A\,{}^tB) = \langle A, B\rangle$.
Donc $\langle .,.\rangle$ est une forme linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
• On a pour toutes matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, en posant $C = {}^tB = (c_{i,j})$:

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}c_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} \text{ et } \langle A, A\rangle = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$

Donc : $\forall A \in E, \langle A, A\rangle \geqslant 0$.
Et : $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow \Big(\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, a_{i,j} = 0\Big) \Rightarrow A = 0$.
Donc $\langle .,.\rangle$ est positive et définie.
Toutes ces propriétés justifient que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire [(1)].

2. ⋆ Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$, on a :
$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^tB) = -\mathrm{Tr}(AB)$ et $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = \mathrm{Tr}(B^tA) = \mathrm{Tr}(BA)$.
Ainsi $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in A_n(\mathbb{R}), \langle A, B\rangle = 0$ et $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, leur somme est directe.
⋆ Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) \qquad (\mathcal{E}).$$

La première matrice est symétrique et la seconde antisymétrique (on le voit en calculant leur transposée), donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$
La conjonction de ces deux propriétés donne :

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})}$$

(1). *Remarque :* En convenant de confondre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$ (en mettant, par exemple, les lignes «bout à bout »), on reconnaît le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ et la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

3. $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \min\limits_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||M - N|| = ||M - p(M)||$, où $p(M)$ est la projection orthogonale de M sur $S_3(\mathbb{R})$. Or $(\mathcal{E})$ donne $p(M) = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ car $\dfrac{1}{2}(M + {}^tM) \in S_n(\mathbb{R})$
et $M - \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM) \in A_n(\mathbb{R}) = \big(S_n(\mathbb{R})\big)^\perp$.
Ainsi : $d(M, S_3(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\,\big|\big|M - {}^tM\big|\big|$.
Comme $M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, il vient

$$\boxed{d(M, S_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7}.}$$

4. **a)** $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, M \mapsto \mathrm{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{R}^1$ donc $\mathrm{rg}\varphi = \dim \mathrm{Im}\varphi \leqslant 1$.
Cette application est non nulle (on a par exemple $\varphi(I) = n \neq 0$), donc $\mathrm{rg}\varphi > 0$. Du coup, $\mathrm{rg}\varphi = 1$.
Par la formule du rang, puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$,

$\boxed{\text{son noyau H est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de dimension } n^2 - 1.}$

b) $M \in H \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M\,{}^tI_n) = 0 \Leftrightarrow \langle M, I\rangle_n = 0$ ce qui donne la réponse, et même plus :

$$\boxed{H^\perp = \mathrm{Vect}(I_n).}$$

c) *Remarque :* Pour tout sous-espace F, on a : $p_F + p_{F^\perp} = id$ car si un vecteur u s'écrit $u = f + f'$ avec $f \in F$ et $f' \in F^\perp$, alors $p_F(u) = f$ et $p_{F^\perp}(u) = f'$, donc $p_F(u) + p_{F^\perp}(u) = f + f' = u$.
Par la propriété de la norme minimale, $d(J, H) = ||J - p_H(J)||$.
Soit q la projection orthogonale sur $H^\perp$.
$J = p_H(J) + p_{H^\perp}(J) = p_H(J) + q(J)$ donc $J - p_H(J) = q(J)$
Alors $d(J, H) = ||q(J)||$. Or $\left(\frac{1}{||I_n||}I_n\right)$ est une base orthonormale de $H^\perp$,
donc $q(J) = \left\langle J, \frac{1}{||I_n||}I_n\right\rangle \frac{1}{||I_n||}I_n = \dfrac{\langle J, I_n\rangle}{||I_n||^2}\,I_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}^2}\,I_n = I_n$ et donc :

$$\boxed{d(\mathrm{J},\mathrm{H}) = \frac{n}{\sqrt{n}}\sqrt{n} = n.}$$