EXERCICE 1. *Urnes rétrécissantes*

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

PARTIE I.

1. Donner la loi de X_1, la loi de X_2 et leurs espérances.

2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.

3. Déterminer la loi de X_4 et calculer $E(X_4)$.

PARTIE II. On étudie désormais le cas général.

1. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

2. Soit N_1, la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.

a) Reconnaître la loi de N_1.

b) Vérifier que :

$$\forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ \forall k \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ P_{[N_1=i]}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k-1 \\ P(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geqslant k \end{cases}$$

c) Montrer que : $\forall k \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$.

On pourra admettre les résultats (b) et (c) pour résoudre la suite.

3. Calculer $P(X_n = 2)$. *On donnera la réponse sous la forme d'une somme.*

4. Pour $n \geqslant 2$, on pose : $v_n = n!P(X_n = n-1)$.

a) Etablir que : $\forall n \geqslant 2,\ v_{n+1} = v_n + n$.

b) En déduire $P(X_n = n-1)$.

PARTIE III.

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\quad E(X_n | N_1 = i) = E(X_{i-1}) + 1$.

2. Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\quad E(X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$.

3. Montrer enfin que : $\forall n \geqslant 1,\quad E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

EXERCICE 2. *ESC 2005*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$par :

$$f((a,b,c)) = (a+b+c)e^{-abc}$$

.

1. a) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la dérivée partielle d'ordre un $\partial_1 f(a,b,c)$.

c) Donner les dérivées partielles d'ordre deux $\partial^2_{1,1} f(a,b,c)$ et $\partial^2_{1,2} f(a,b,c)$.

2. a) On suppose que (α,β,γ) est un point critique de f.

Montrer que $\alpha\beta\gamma \neq 0$ et que $\dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha\gamma} = \dfrac{1}{\beta\gamma}$.

En déduire : $\alpha = \beta = \gamma = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

b) Vérifier que le point $A = \left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$ est bien un point critique de f.

c) Justifier que la hessienne de f au point critique A est

$$\nabla^2 f(A) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{1}{3}} H \text{ où H est la matrice } H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Calculer H^2 en fonction de H et de I_3.

b) Déterminer une matrice orthogonale P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$^t PHP = \Delta.$$

c) Étudier le signe de la forme quadratique

$$q : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \mapsto {}^t XHX$$

et montrer que le point A est un point col de f.