EXERCICE 1. *Urnes rétrécissantes*

Dans la partie I et au début de la partie II, j'utilise fréquemment la formule des probabilités composées pour calculer des probabilités d'intersection.

PARTIE I.

1. $\boxed{\text{X}_1 \text{ est constante égale à } 1,\ \text{X}_2 \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1\,;\,2]\!].}$

$\boxed{\text{E}(\text{X}_1) = 1 \text{ et } \text{E}(\text{X}_2) = 3/2.}$

2. $\text{X}_3(\Omega) = [\![1\,;\,3]\!]$. Appelons N_k le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule tirée.

- $\text{P}(\text{X}_3 = 1) = \text{P}(\text{N}_1 = 1) = 1/3$;
- $\text{P}(\text{X}_3 = 2) = \text{P}([(\text{N}_1 = 2) \cap (\text{N}_2 = 1)] \cup [(\text{N}_1 = 3) \cap (\text{N}_2 = 1)])$, et par incompatibilité,

$\text{P}(\text{X}_3 = 2) = \text{P}(\text{N}_1 = 2)\text{P}_{(\text{N}_1=2)}(\text{N}_2 = 1) + \text{P}(\text{N}_1 = 3)\text{P}_{(\text{N}_1=3)}(\text{N}_2 = 1) = \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

- $\text{P}(\text{X}_3 = 3) = \text{P}((\text{N}_1 = 3) \cap (\text{N}_2 = 2) \cap (\text{N}_3 = 1))$

$= \text{P}(\text{N}_1 = 3)\text{P}_{(\text{N}_1=3)}(\text{N}_2 = 2)\text{P}_{(\text{N}_1=3)\cap(\text{N}_2=2)}(\text{N}_3 = 1) = \frac{1}{3}\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{6}$.

La loi de X_3 est

x_i	1	2	3	Σ
p_i	1/3	1/2	1/6	1
x_ip_i	1/3	1	1/2	11/6

, et $\text{E}(\text{X}_3) = \frac{11}{6}$.

3. $\text{X}_4(\Omega) = [\![1\,;\,4]\!]$.

- $\text{P}(\text{X}_4 = 1) = \text{P}(\text{N}_1 = 1) = 1/4$;
- $\text{P}(\text{X}_4 = 2) = \text{P}([(\text{N}_1 = 4)\cap(\text{N}_2 = 1)]\cup[(\text{N}_1 = 3)\cap(\text{N}_2 = 1)]\cup[(\text{N}_1 = 2)\cap(\text{N}_2 = 1)])$, et par incompatibilité,

$\text{P}(\text{X}_4 = 2) = \text{P}(\text{N}_1 = 4)\text{P}_{(\text{N}_1=4)}(\text{N}_2 = 1) + \text{P}(\text{N}_1 = 3)\text{P}_{(\text{N}_1=3)}(\text{N}_2 = 1) + \text{P}(\text{N}_1 = 2)\text{P}_{(\text{N}_1=2)}(\text{N}_2 = 1)$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.1 = \frac{11}{24}$;

- $\text{P}(\text{X}_4 = 4) = \text{P}((\text{N}_1 = 4) \cap (\text{N}_2 = 3) \cap (\text{N}_3 = 2) \cap (\text{N}_4 = 1))$, et par la formule des probabilités composées,

$\text{P}(\text{X}_4 = 4) = \text{P}(\text{N}_1 = 4)\text{P}_{(\text{N}_1=4)}(\text{N}_2 = 3)\text{P}_{(\text{N}_1=4)\cap(\text{N}_2=3)}(\text{N}_3 = 2)\text{P}_{(\text{N}_1=4)\cap(\text{N}_2=3)\cap(\text{N}_3=2)}(\text{N}_4 = 1)$

$= \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{24}$;

- $\text{P}(\text{X}_4 = 3) = 1 - \text{P}(\text{X}_4 = 1) - \text{P}(\text{X}_4 = 2) - \text{P}(\text{X}_4 = 4) = \frac{1}{4}$.

La loi de X_4 est

x_i	1	2	3	4	Σ
p_i	1/4	11/24	1/4	1/24	1
x_ip_i	1/4	11/12	3/4	1/6	25/12

, et $\text{E}(\text{X}_4) = \frac{25}{12}$.

PARTIE II.

1. En généralisant les raisonnements précédents, on a $\boxed{\text{P}(\text{X}_n = 1) = 1/n \text{ et } \text{P}(\text{X}_n = n) = 1/(n!).}$

2. a) $\boxed{\text{N}_1 \text{ suit la loi unforme sur } [\![1\,;\,n]\!].}$

b) • Si $\text{N}_1 = i$; il reste $i - 1$ boules dans l'urne lorsqu'on va tirer la deuxième, il y aura alors au plus encore $i - 1$ tirages, donc au plus i tirages en tout.Si $i \leqslant k - 1$, il n'est plus possible que $\text{X}_n = k$.
Ainsi $\text{P}_{(\text{N}_1=i)}(\text{X}_n = k) = 0$ dans ce cas.
• Si $i \geqslant k$ et $\text{N}_1 = i$, l'urne contient $i - 1$ boules avant le deuxième tirage et on cherche la probabilité qu'il y ait encore $k - 1$ tirages. Cette probabilité est $\text{P}(\text{X}_{i-1} = k - 1)$.
D'où $\text{P}_{(\text{N}_1=i)}(\text{X}_n = k) = \text{P}(\text{X}_{i-1} = k - 1)$ dans ce cas.

$$\boxed{\forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ \forall k \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ \text{P}(\text{X}_n = k/\text{N}_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k-1 \\ \text{P}(\text{X}_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geqslant k \end{cases}.}$$

c) La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\text{N}_1 = i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ tous de probabilité $1/n$ permet d'écrire, pour $k \in [\![2\,;\,n]\!]$,

$\text{P}(\text{X}_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \text{P}_{[\text{N}_1=i]}(\text{X}_n = k)\text{P}(\text{N}_1 = i) = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} \text{P}(\text{X}_{i-1} = k - 1)$ (notons que $\text{P}_{[\text{N}_1=1]}(\text{X}_n = k) = 0$ car $k \geqslant 2$.).

Par un décalage d'indice, $\boxed{\text{pour } k \in [\![2\,;\,n]\!]\,,\ \text{P}(\text{X}_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} \text{P}(\text{X}_i = k - 1).}$

3. En appliquant ce qui précède, $\boxed{\text{P}(\text{X}_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \text{P}(\text{X}_i = 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.}$

4. a) $v_{n+1} = (n + 1)!\text{P}(\text{X}_{n+1} = n) = (n + 1)!\frac{1}{n+1}\sum_{i=n-1}^{n} \text{P}(\text{X}_i = n - 1)$

$= n!(\text{P}(\text{X}_{n-1} = n-1) + \text{P}(\text{X}_n = n-1)) = n + v_n$. Donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_{n+1} = v_n + n.}$

b) $v_2 = 1$, et pour tout $n \geqslant 3$, $v_n = \sum_{k=2}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) + v_2 = \sum_{k=2}^{n-1} k + 1$,

v_n est la somme des entiers de 1 à $n-1$: $v_n = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

Alors $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = n-1) = \dfrac{1}{n!}v_n = \dfrac{1}{2(n-2)!}.}$ *On peut aussi proposer une récurrence sur $n \geqslant 2$.*

PARTIE III.

1. Soit $(i,n) \in [\![2\,;\,n]\!]^2$. $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathrm{N}_1 = i) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}_{[\mathrm{N}_1=i]}(\mathrm{X}_n = k) = \sum_{k=1}^{i} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i-1} = k-1)$

$= \sum_{k=1}^{i}(k+1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i-1} = k) = \sum_{k=1}^{i} k\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i-1} = k) + \sum_{k=1}^{i}\mathrm{P}(\mathrm{X}_{i-1} = k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{i-1}) + 1.$

$\boxed{\forall n \geqslant 2, \forall i \in [\![2\,;\,n]\!]\,, \quad \mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathrm{N}_1 = i) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{i-1}) + 1.}$

2. Par la formule de l'espérance totale avec le système $(\mathrm{N}_1 = i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathrm{N}_1 = i)\mathrm{P}(\mathrm{N}_1 = i) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n}(\mathrm{E}(\mathrm{X}_{i-1}) + 1) + 1\right)$ car $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n|\mathrm{N}_1 = 1) = 1$.

En changeant l'indice, $\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) + 1.}$

3. $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-2}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})\right) + 1$, mais $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-2}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) + 1$,

donc $\sum_{i=1}^{n-2}\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = (n-1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) - (n-1)$.

D'où $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \dfrac{1}{n}\left((n-1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) - (n-1) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})\right) + 1$.

Donc $\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \dfrac{1}{n}.}$

4. $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 1$; et pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=2}^{n}(\mathrm{E}(\mathrm{X}_k) - \mathrm{E}(\mathrm{X}_{k-1})) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k} + 1$.

D'où $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}.}$ *On peut aussi proposer une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.*

EXERCICE 2. *ESC 2005*

1. a) Notons que la fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est paire ou impaire, suivant la parité de k, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ converge si $\int_{0}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$. Comme $\lim_{t\to+\infty} t^{k+2}e^{-t^2} = 0$ puisque $t^{k+2} \underset{t\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{t^2})$, on a $t^k e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Les fonctions intégrées étant continues et positives sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$, et puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, la règle de négligeabilité permet d'affirmer que $\int_1^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ converge.

Par continuité de $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ sur $[\,0\,;\,1\,]$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt$ converge, et par parité,

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt \text{ converge pour tout entier naturel } k.}$

b) $t \mapsto t^{2k+1}e^{-t^2}$ est impaire donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k\,,\ \mathrm{I}_{2k+1} = 0.}$

c) En utilisant la densité $t \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}$ de la loi de X, $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 1$, donc

$\boxed{\mathrm{I}_0 = \sqrt{\pi}.}$ Et $\boxed{\mathrm{I}_2 = \sqrt{\pi}\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \sqrt{\pi}(\mathbb{V}(\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{X})^2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

d) $\mathrm{Y}(\Omega) = [\,0\,;\,+\infty\,[$ et pour $x > 0$,
$\mathrm{F}_\mathrm{Y}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \sqrt{x}) = \mathrm{F}_\mathrm{X}(\sqrt{x}) - \mathrm{F}_\mathrm{X}(-\sqrt{x})$.
Par dérivation sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et comme f_X est paire :
$f_\mathrm{Y}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(f_\mathrm{X}(\sqrt{x}) + f_\mathrm{X}(-\sqrt{x})) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x}$ d'où $\mathrm{Y} \hookrightarrow \gamma(1/2)$.

Du coup : $\boxed{\mathrm{I}_4 = \sqrt{\pi}\mathbb{E}(\mathrm{X}^4) = \sqrt{\pi}\mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) = \sqrt{\pi}(\mathbb{V}(\mathrm{Y}) + \mathbb{E}(\mathrm{Y})^2) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}.}$

e) Pour tous réels a, b, c, $f((a,b,c))$ existe par linéarité de l'intégrale et :
$f((a,b,c)) = \dfrac{e^{-abc}}{\sqrt{\pi}}\left(a\mathrm{I}_0 + 2b\mathrm{I}_2 + \dfrac{4c}{3}\mathrm{I}_4\right)$. Ainsi $\boxed{f((a,b,c)) = (a+b+c)\mathrm{e}^{-abc}.}$

2. a) Les fonctions polynomiales $(a,b,c) \mapsto -abc$ et $(a,b,c) \mapsto a+b+c$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $(a,b,c) \mapsto \mathrm{e}^{-abc}$ est une composée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Donc, comme tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $\boxed{f \text{ est une fonction de classe } \mathrm{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^3.}$ **b)**

$\boxed{\partial_1 f(a,b,c) = \mathrm{e}^{-abc}(1 - abc - b^2c - bc^2).}$

c) $\boxed{\begin{array}{c}\partial^2_{1,1}f(a,b,c) = \mathrm{e}^{-abc}bc(-2+abc+b^2c+bc^2) \text{ et} \\ \partial^2_{1,2}f(a,b,c) = \mathrm{e}^{-abc}c(-2a-2b-c+a^2bc+ab^2c+abc^2).\end{array}}$

3. **a)** Si (α,β,γ) est un point critique de f, alors (α,β,γ) annule le gradient de f. Donc : $\begin{cases}\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) &= 1\\ \alpha\gamma(\alpha+\beta+\gamma) &= 1\\ \alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) &= 1\end{cases}$. Par conséquent, ni α, ni β, ni γ n'est nul, donc $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

Le système entraîne alors $\dfrac{1}{\alpha\beta} = \dfrac{1}{\alpha\gamma} = \dfrac{1}{\beta\gamma} = \alpha+\beta+\gamma$, donc, en multipliant ces égalités par α, β puis γ, on obtient $\alpha=\beta=\gamma$. Les lignes du systèmes deviennent alors $3\alpha^3 = 1$, donc $\boxed{\alpha=\beta=\gamma=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.}$

b) Réciproquement, si $\mathrm{A} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, alors $\nabla f(\mathrm{A}) = (0,0,0)$.

$\boxed{\text{A est bien l'unique point critique de } f.}$

c) Avec $a=b=c=\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}$, $abc = \frac{1}{3}$,

$\partial^2_{1,1}f(a,b,c) = \partial^2_{2,2}f(a,b,c) = \partial^2_{3,3}f(a,b,c) = \mathrm{e}^{-1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}(-2+3\times\frac{1}{3}) = -\mathrm{e}^{-1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}$ et $\partial^2_{1,2}f(a,b,c) = \partial^2_{1,3}f(a,b,c) = \partial^2_{2,3}f(a,b,c) = \mathrm{e}^{-1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}(-2-2-1+3\times\frac{1}{3}) = -4\mathrm{e}^{-1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}$.

$\boxed{\text{La hessienne de } f \text{ au point critique A est bien } -\mathrm{e}^{-1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}\mathrm{H}.}$

4. **a)** $\mathrm{H}^2 = 6\mathrm{H} - 27\mathrm{I}_3$, $\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 27 = (\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}-9)$ est annulateur de H.

b) On vérifie que $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}) = \{-3;9\}$ en regardant le rang de $\mathrm{H}+3\mathrm{I}_3$ et celui de $\mathrm{H}-9\mathrm{I}_3$. En général vous trouvez $\mathrm{E}_9 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{E}_{-3} = \mathrm{Vect}((-1,0,1);(-1,1,0))$.
Bien que H soit symétrique, $\big((1,1,1);(-1,0,1);(-1,1,0)\big)$ n'est pas orthogonale bien que formée de vecteurs propres. What happens ?
D'après le cours, E_9 et E_{-3} sont orthogonaux, donc tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Ainsi

$$(1,1,1) \perp (-1,0,1) \text{ et } (1,1,1) \perp (-1,1,0),$$

mais deux vecteurs (même non colinéaires) de E_{-3} n'ont aucune raison d'être orthogonaux. C'est ce qui arrive pour $u = (-1,0,1)$ et $v = (-1,1,0)$ puisque $\langle u,v\rangle = 1 \neq 0$.

Il faut orthogonaliser (ou orthonormaliser) c'est deux vecteurs en une famille (u',v'). Le procédé de Schmidt convient, puisqu'il assure en prime que $\mathrm{Vect}(u',v') = \mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{E}_{-3}$.

> La famille $\mathrm{F} = ((1,1,1),(-1,0,1),(1,-2,1))$ a les propriétés suivantes :
> — h est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(h) = \{-3;9\}$, $\dim \mathrm{E}_9 = 1$ et $\dim \mathrm{E}_{-3} = 2$;
> — F est formée de vecteurs propres de h, associés respectivement à 9, -3 et -3 ;
> — F est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$;
> — F est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique vers la base

$$\mathrm{F}' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right).$$

F′ étant une base formée de vecteurs propres, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{HP} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} = \Delta$. La base canonique et F′ étant orthonormales, P est orthogonale et $\mathrm{P}^{-1} = {}^t\mathrm{P}$.
$\boxed{\text{P et } \Delta \text{ ainsi définies conviennent.}}$

c) Si $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, ${}^t\mathrm{XHX} = {}^t\mathrm{X}(\mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P})\mathrm{X} = {}^t({}^t\mathrm{PX})\mathrm{D}({}^t\mathrm{PX})$. Soit $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{PX} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$. $q(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{YDY} = 9a^2 - 3b^2 - 3c^2$.
Ainsi, pour $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, $q(\mathrm{X}) = 9 > 0$, et pour $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$, $q(\mathrm{X}) = -3 < 0$.
Ainsi $\boxed{q \text{ est de signe variable.}}$
L'étude de la question précédente montre que q n'est ni définie positive, ni définie négative et qu'elle est de signe variable. Du coup :
$\boxed{\text{le point A est un point col de } f.}$

Rappel : liens entre extremum et forme quadratique au point critique :
☞ Si la forme quadratique est **définie positive**, il y a un **minimum** ;
☞ Si la forme quadratique est **définie négative**, il y a un **maximum** ;
☞ Si la forme quadratique est **de signe variable** - ce que je justifie en donnant un point où elle est strictement négative et un autre point où elle est strictement positive -, il y a un **point col** ;
☞ Si la forme quadratique est **non définie** - même de signe constant, **je ne peux pas conclure et tout est possible**, extremum ou point col.