Pour tout $x \geqslant 1$, on pose :

$$f(x) = \int_0^\pi \sqrt{x + \cos t}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a)** Justifier que le domaine de définition de f est bien $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

b) Sans chercher à dériver f, montrer que f est croissante sur $[\,1\,;\,+\infty\,[$.

2. On rappelle que $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$. Calculer $f(1)$.

3. **a)** Montrer que pour tout x de $[\,1\,;\,+\infty\,[$, $\pi\sqrt{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \pi\sqrt{x+1}$.

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. **a)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$

Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Pour h strictement positif, on pose

$$\mathrm{I}(h) = \int_0^\pi \frac{\sin(t/2)}{\sqrt{h + 2\cos^2(t/2)}}\mathrm{d}t.$$

À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{2}\cos(t/2)}{\sqrt{h}}$, montrer que

$$\mathrm{I}(h) = \sqrt{2} \times g\left(\sqrt{\frac{2}{h}}\right).$$

c) En déduire $\lim\limits_{h \to 0^+} \mathrm{I}(h)$.

5. Justifier l'inégalité :

$$\forall h > 0,\ \frac{1}{2\sqrt{1 + h + \cos t}} \leqslant \frac{\sqrt{1 + h + \cos t} - \sqrt{1 + \cos t}}{h}.$$

6. **a)** Démontrer que : $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$.

b) Que peut-on en déduire pour f et pour sa représentation graphique en 1 ?