1. **a)** Quand t décrit $[0,\pi]$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$ et $x+\cos t$ reste toujours positif si et seulement si $x \geqslant 1$. Donc, $\forall x \in [1,+\infty[$, $t \mapsto \sqrt{x+\cos t}$ est définie et continue sur $[0,\pi]$. Donc son intégrale existe $\boxed{\mathcal{D}_f = [1,+\infty[.}$

b) Soient x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant y$. Par croissance de la fonction racine, $\forall t \in [0,\pi]$, $\sqrt{x+\cos t} \leqslant \sqrt{y+\cos t}$. La croissance de l'intégrale induit $f(x) \leqslant f(y)$. $\boxed{f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[}$

2. $f(1) = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+\cos t}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2(t/2)}\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi \cos(t/2)dt$, parce que $\dfrac{t}{2} \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos\dfrac{t}{2} \geqslant 0$.

Donc : $\boxed{f(1) = \sqrt{2}\big[2\sin(t/2)\big]_0^\pi = 2\sqrt{2}}$

3. **a)** $\forall x \in [1,+\infty[, \forall t \in [0,\pi]$, $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x+\cos t} \leqslant \sqrt{x+1}$.

Par croissance de l'intégrale : $\boxed{\forall x \geqslant 1, \quad \pi\sqrt{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \pi\sqrt{x+1}.}$

b) En divisant l'encadrement précédent par $\pi\sqrt{x}$, on a :

$\forall x \geqslant 1, \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{f(x)}{\pi\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$, qui s'écrit aussi

$\forall x \geqslant 1, \quad \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} \leqslant \dfrac{f(x)}{\pi\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}.$

Minorant et majorant ayant la même limite 1, par encadrement :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\pi\sqrt{x}} = 1$ et $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi\sqrt{x}.}$

4. **a)** Pour tout x, on constate que $\sqrt{1+x^2} > |x|$, donc $x+\sqrt{1+x^2} > x+|x|$ et $x+\sqrt{1+x^2} > 0$, d'où : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

De plus, $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable à valeurs dans $[1\,;+\infty[$, or $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, donc par composition, $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par addition $x \mapsto x+\sqrt{1+x^2}$ l'est aussi, et comme expliqué précédemment, prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$. Or ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc par composition, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$. On a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

b) Le changement de variable $u = \dfrac{\sqrt{2}\cos(t/2)}{\sqrt{h}}$ donne $du = -\dfrac{\sin(t/2)}{\sqrt{2h}}$, et :

$$\mathrm{I}(h) = -\int_{\sqrt{2/h}}^0 \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{h+hu^2}}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2/h}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \sqrt{2}\,[g(u)]_0^{\sqrt{2/h}}$$

donc $\boxed{\mathrm{I}(h) = \sqrt{2}g\left(\sqrt{\dfrac{2}{h}}\right).}$

c) Comme $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\sqrt{\frac{2}{h}} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} g(u) = +\infty$, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to0^+}\mathrm{I}(h) = +\infty.}$

5. Soit $h > 0$ et $t \in [\,0\,;\pi\,]$.

$\dfrac{\sqrt{1+h+\cos t}-\sqrt{1+\cos t}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h+\cos t}+\sqrt{1+\cos t}}$ (en multipliant par l'expression conjuguée)

Or $\sqrt{1+h+\cos t}+\sqrt{1+\cos t} \leqslant 2\sqrt{1+h+\cos t}$.

En passant aux inverses,

$$\boxed{\forall h > 0, \quad \forall t \in [\,0\,;\pi\,], \quad \frac{\sqrt{1+h+\cos t}-\sqrt{1+\cos t}}{h} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{1+h+\cos t}}.}$$

6. **a)** Par croissance de l'intégrale, l'inégalité précédente donne :

$\forall h > 0, \quad \dfrac{1}{h}\big(f(1+h)-f(1)\big) \geqslant \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{1+h+\cos t}}\mathrm{d}t.$

Or

$$\int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{1+h+\cos t}}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{h+2\cos^2(t/2)}}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^\pi \frac{\sin(t/2)}{2\sqrt{h+2\cos^2(t/2)}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{I}(h).$$

Par comparaison, puisque $\displaystyle\lim_{h\to0^+}\mathrm{I}(h) = +\infty$,

$$\boxed{\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty.}$$

b) J'en déduis que f n'est pas dérivable en 1 et que sa courbe représentative présente une demi-tangente verticale en $(1, 2\sqrt{2})$ (pour mémoire, $f(1) = 2\sqrt{2}$).